

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DEPARTAMENTO DE
TEORÍA DE LA SEÑAL Y COMUNICACIONES



INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIONES

PROYECTO FIN DE CARRERA

OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA TRANSMITIDA EN
PRECODIFICADORES PARA SISTEMAS MIMO
MULTIUSUARIO

AUTOR: Elena González Sainz

DIRECTOR: Matilde Sánchez Fernández

Leganés, Octubre de 2013

AGRADECIMIENTOS

A Matilde Sánchez, a la educación pública y a mi familia.

RESUMEN

La motivación de este proyecto se debe a la necesidad de reducir el consumo de energía en los sistemas de comunicaciones móviles. Los sistemas MIMO se usan cada vez más debido a las ventajas que proporcionan en los sistemas de comunicaciones. En la literatura existen diferentes pre/decodificadores para estos sistemas, especializados en disminuir el ruido inherente al sistema, la ISI, etc....en este proyecto se diseña un precodificador que minimiza la potencia de transmisión en un sistema MIMO utilizando la descomposición BD-GMD (particularización de la descomposición GMD).

ABSTRACT

The motivation of this project is the need to reduce energy consumption in mobile communications systems. MIMO systems are used more and more, the reason is the amount of advantages that they offer to the communications systems. In literature there exist different pre/decoders, some specialized on minimizing the inherent noise of the system, the ISI, etc...in this document a new precoder is designed, the proposal of this new design is focused in minimizing the transmission power of a MIMO system using the BD-GMD decomposition (a particular case of GMD decomposition).

ÍNDICE

ÍNDICE

-CAPÍTULO 1-

1. INTRODUCCIÓN.....	12
1.1. Introducción general a sistemas MIMO.....	13
1.2. Decodificadores y Precodificadores	18
1.3. Motivación.....	20
1.4. Objetivos del proyecto.	21
1.5. Estructura del documento.	21

-CAPÍTULO 2-

2. OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA TRANSMITIDA EN PRE-CODIFICADORES PARA SISTEMAS MIMO MULTIUSUARIO.....	22
2.1. Método GMD.....	23
2.2. Método BD-GMD.....	29
2.2.1. Modelo de canal	29
2.2.2. Descripción y desarrollo del algoritmo.....	30
2.2.3. Ejemplo matriz $H_{6 \times 6}$	34
2.2.4. Aplicaciones diseñadas a partir de BD-GMD.....	41
2.3. Desarrollo del método de Mínima Potencia.....	42
2.3.1. Algoritmo de Minimización de Potencia para una ordenación arbitraria.....	42
2.3.2. Demostración analítica del Algoritmo de Mínima Potencia...46	

-CAPÍTULO 3-

3. SIMULACIONES.....	49
3.1. Relación E_s/SNR	50
3.2. Es en función de N_r, N_t, K	51

3.3. Tasa en función de K	54
3.4. Relación Tasa/Interferencia.	56
3.5. Variación de número de receptores y transmisores.....	65
3.6. Es en función de diferentes modelos de SNR.....	66

-CAPÍTULO 4-

4. CONCLUSIONES Y POSIBLES MEJORAS.....	67
4.1. Conclusiones.....	68
4.2.Posibles Mejoras.....	69
4.2.1. Todos los TX.....	69
4.2.2. Ordering Users	69

-ANEXOS-

ANEXO. Presupuesto	73
--------------------------	----

-REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS-

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.	76
----------------------------------	----

TABLA DE ABREVIATURAS

MIMO:	Multiple Input-Multiple Output
SISO:	Single Input- Single Output
SIMO:	Single Input-Multiple Output
MISO:	Multiple Input- Single Output
SNR:	Signal-to-Noise Ratio
BW:	Bandwidth
MAC:	Multitple Access Channel
BC:	Broadcast Channel
ISI:	Interferencia Inter-Simbólica
DPC:	Dirty Paper Code
ZF:	Zero Forcing
MMSE:	Minimum Mean Square Error
DFE:	Decision Feedback Equalizer
QoS:	Calidad de Servicio
BS:	Base Station
GMD:	Geometric Mean Decomposition
BD-GMD:	Block Diagonal – Geometric Mean Decomposition
VBLAST:	Vertical BAST (Bell Laboratories Layered Space Time)
BER:	Bit Error Rate
SVD:	Singular Values Decomposition
CSIT:	Channel State Information at the Transmitter
CSCG:	Circularly Symmetric Complex Gaussian
UCD:	Uniform Channel Decomposition
UL:	Up Link
DL:	Down Link
IB:	Interference Balancing
TX:	Transmitters
SCM :	Sucessive closest Match

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Modelo de un sistema MIMO.	14
1.2. Modelo sistema MIMO.	14
1.3. Matriz de canal H del sistema MIMO.	14
1.4. Sistema SISO.	15
1.5. Sistema MISO.	15
1.6. Sistema SIMO.	16
1.7. Comparativa entre Capacidad sistema MIMO y SIMO/MISO.	16

2. OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA TRANSMITIDA EN PRE-CODIFICADORES PARA SISTEMAS MIMO MULTIUSUARIO

2.1. Transformación de $R^{(k)}$ a $G_2^T \Pi R^{(k)} \Pi G_1$	28
2.2. Diseño de Transceptor descomposición BD-GMD [18].	32
2.3. Comprobación del correcto funcionamiento del algoritmo BD-GMD.....	39
2.4. Comprobación Q unitaria.....	40
2.5. Resultado algoritmo BD-GMD.....	40

3. SIMULACIONES

3.1. Es en función de la SNR [dB].	51
3.2. Es en función del número de antenas transmisoras y receptoras.	52
3.3. Es en función de la distribución de las antenas transmisoras y receptoras.	53
3.4. Es vs P variando el número de usuarios receptores.	54
3.5. Tasa en función del número de antenas por receptor.	55
3.6. Variación de la Tasa debido al número de antenas por receptor.	56
3.7. Tasa en función del modelo de SNR con Interferencia.	57

3. 8. Tasa Total para diferentes modelos de SNR con Interferencia.	58
3.9. Diagonal de L para modelo de 5 usuarios.	59
3.10. Tasa en función del modelo de SNR sin Interferencia.	61
3. 11. Tasa Total para diferentes modelos de SNR sin Interferencia.	62
3.12. Tasa en función del modelo de SNR con y sin Interferencia.	63
3.13. Comparativa de Tasa Total para diferentes modelos de SNR (mínima).	64
3.14. Comparativa de Tasa Total para diferentes modelos de SNR (media).	64
3.15. Comparativa de Tasa Total para diferentes modelos de SNR (3).	65
3.16. Tasa en función del número de receptores y transmisores.	65
3.17 Energía en función de diferentes modelos de SNR.	66

4. CONCLUSIONES Y POSIBLES MEJORAS

4.1 Ordenación de Usuarios [19].	71
---------------------------------------	----

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN



1. INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción general a sistemas MIMO:

En sistemas de comunicaciones son notorias las ventajas de usar sistemas de varias antenas para conformar el haz e incrementar la direccionalidad enfocando mejor la energía y disminuyendo la interferencia con otros usuarios. El uso de múltiples antenas se puede enfocar a otros objetivos como:

-Diversidad Espacial: se combate el desvanecimiento transmitiendo y recibiendo por varias antenas. Da robustez al sistema de comunicaciones.

-Multiplexado espacial: se incrementa la eficiencia espectral. Se transmite/recibe más información con el mismo ancho de banda al usarse canales de propagación distintos usados en paralelo. Incrementa la tasa binaria.

Estas dos ventajas pueden llegar a ser mutuamente excluyentes pero ambas son técnicas que se engloban dentro de los sistemas MIMO (Multiple Input-Multiple Output). Deben llevarse a cabo medidas de compromiso en la combinación de los distintos efectos en función de las funciones a las que esté destinado el sistema MIMO ya que la limitación que existe en los grados de libertad espaciales hace que no sea posible obtener estos beneficios a la vez. El multiplexado en espacio va a conseguir que en el mismo espectro estemos enviando distintas ráfagas por lo que estaremos optimizando la velocidad de transmisión pero ésta no tendrá protección frente a los efectos del canal por lo que la SNR en recepción será menor que usando diversidad espacial por lo que la probabilidad de error será mayor [1].

En los sistemas MIMO se usan N_t antenas en transmisión y N_r en recepción. Se aprovechan los $N_t \times N_r$ canales físicos establecidos. Cuanto mayor sea la incorrelación entre dichos canales mayor será la capacidad del sistema MIMO. En la Figura 1.1. se puede observar la estructura de un sistema MIMO.

El sistema de comunicaciones se define como K ráfagas de información en paralelo agrupados en el vector de información $u \in \mathbb{C}^K$. El vector u pasa por el precodificador $F \in \mathbb{C}^{N_t \times K}$ obteniéndose el vector $x \in \mathbb{C}^{N_t}$. La señal recibida se denomina $y \in \mathbb{C}^{N_r}$ que designa la salida del canal H a la que se agrega a un vector de ruido $n \in \mathbb{C}^{N_r}$:

$$y = H \cdot x + n = H \cdot F \cdot u + n$$

Finalmente la señal recibida pasaría por un filtro decodificador $G \in \mathbb{C}^{K \times N_r}$. A la salida del decodificador obtendríamos \hat{u} , la estimación del vector de información u . La definición matemática del vector \hat{u} sería:

$$\hat{u} = G \cdot H \cdot F \cdot u + F \cdot n$$

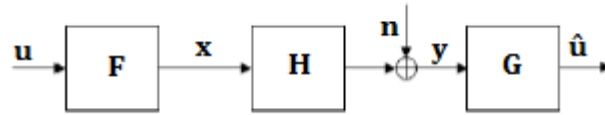


Figura 1.1. Modelo de un sistema MIMO

Profundizando en la parte del canal del sistema: $y = H \cdot x + n$, la componente i de la información recibida sería:

$$y_i = h_{i1} \cdot x_1 + h_{i2} \cdot x_2 + h_{i3} \cdot x_3 + \dots + h_{ii} \cdot x_i + \dots + h_{iN_t} \cdot x_{N_t} + n_i$$

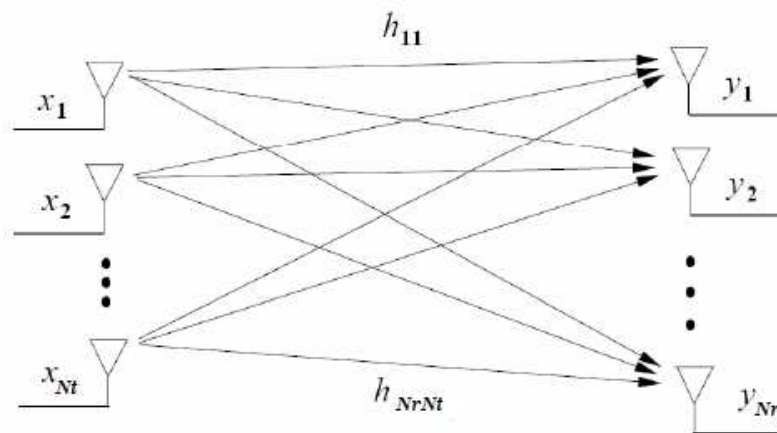


Figura 1.2. Modelo sistema MIMO

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{Nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1N_t} \\ h_{21} & \ddots & & \\ & & h_{ij} & \\ \vdots & & & \ddots \\ h_{Nr1} & & & h_{NrN_t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_{N_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_i \\ \vdots \\ n_{N_t} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_Y \quad \underbrace{\hspace{10em}}_H \quad \underbrace{\hspace{10em}}_X \quad \underbrace{\hspace{10em}}_N$

Figura 1.3. Matriz de canal H del sistema MIMO

Cada término de la matriz representa un camino de la señal distinto afectado por las antenas de tx/rx y de la propagación.

La señal recibida y está compuesta por las componentes de información para cada uno de los usuarios del sistema que, van a estar compuestas a su vez por la aportación de su usuario correspondiente (componente i del vector u) y factores resultado de la influencia del resto de usuarios, escalados por los valores correspondientes de la matriz de canal (matriz H), y del ruido aditivo n que este mismo introduce. Del mismo modo, el resto de ráfagas de información se verán afectadas por nuestro usuario, siendo los valores h_{ij} , las ganancias de canal para los enlaces entre las antenas transmisoras j y la antena receptora i por lo que la colocación y condicionamiento de las antenas transmisoras va a ser muy importante a la hora de separar las distintas componentes recibidas y de independizar unos usuarios de otros.

Existen distintos modelos de sistema MIMO:

Sistema SISO: Single Input Single Output:

$$H = [h_{11}] = h$$

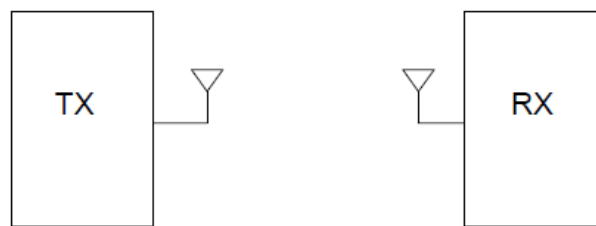


Figura 1.4. Sistema SISO

Sistema MISO: Multiple Input Single Output:

$$H = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_{N_t}]$$

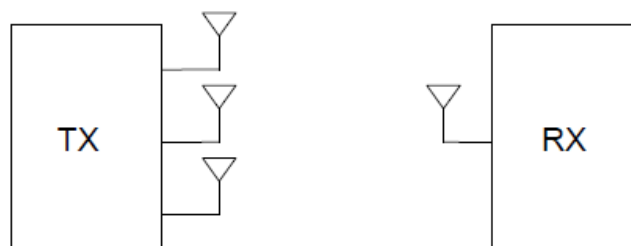


Figura 1.5. Sistema MISO

Sistema SIMO: Single Input Multiple Output:

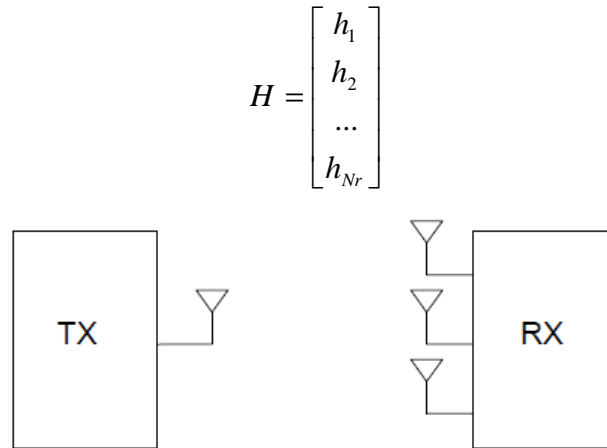


Figura 1.6. Sistema SIMO

Los sistemas MIMO, SISO, SIMO y MISO varían también en el cálculo de su Capacidad, para un único usuario, los límites de Shannon para la capacidad medida en bits/s, donde N_t es el número de antenas utilizadas para la transmisión de la señal de usuario en el sistema MIMO es:

$$C_{SISO} = BW \cdot \log_2(1 + SNR)$$

$$C_{MIMO} = N_t \cdot BW \cdot \log_2(1 + SNR)$$

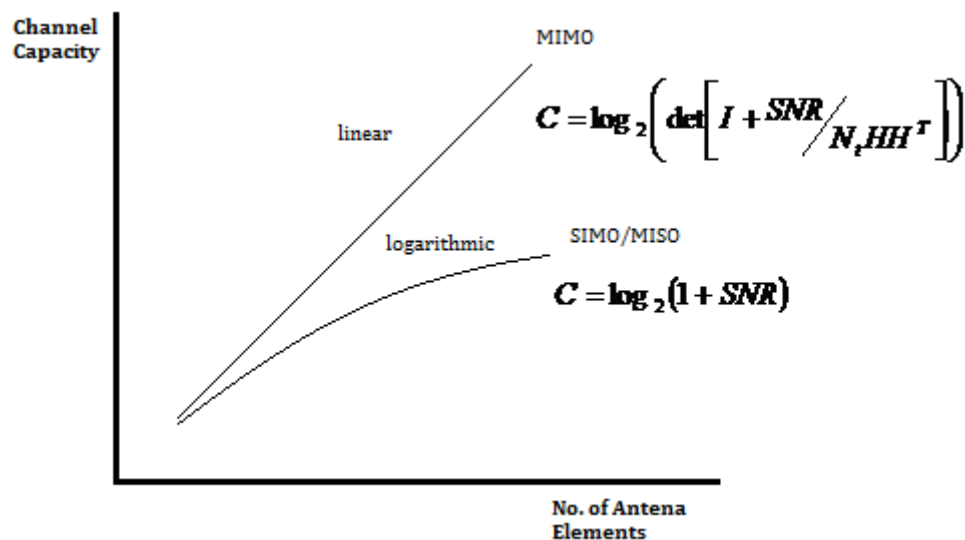


Figura 1.7. Comparativa entre Capacidad sistema MIMO y SIMO/MISO [14]



Donde SNR representa la señal a ruido de un sistema, y BW el ancho de banda disponible del enlace.

En la Figura 1.7. se muestra como la variación, para los sistemas MIMO, será lineal con el número de antenas utilizadas tanto en transmisión como en recepción (en caso de sistema desbalanceado, el menor de los utilizados) frente a los incrementos logarítmicos que se producen con los sistemas SIMO o MISO.

En la tabla 1.1. se muestra la notación para las matrices y señales participantes en un sistema de comunicaciones como el desarrollado en el proyecto.

Notación	Descripción
K	Número de usuarios
N_t	Número de antenas transmisoras
N_r	Número de antenas receptoras
x	Señal transmitida
y	Señal recibida
H	Matriz canal
n	Ruido
u	Señal de información
F	Matriz precodificación

Tabla 1.1. Notación elementos sistema de comunicaciones

MIMO Multiusuario

Las antenas transmisoras y receptoras no tienen porque pertenecer a una única estación base, si no que se aprovechan para manejar la información de forma conjunta. Por lo que precisará transmitir tantas ráfagas de información como usuarios tenga el sistema. Los dos principales modelos de canal de sistemas MIMO multiusuario son el canal MAC (Multiple Access Channel) o ascendente, denominado de tal modo en referencia a las redes móviles en las que varios usuarios envían información a un receptor, y el canal BC (Broadcast Channel) o descendente, en referencia al sentido de bajada en las redes móviles en el que la estación base envía información a la red y cada usuario recibe la información completa de todos los usuarios pero decodifica y procesa exclusivamente la suya.

La mejora en capacidad que se puede obtener en un canal MIMO multiusuario puede llegar a ser mayor que en los sistemas para un único usuario [3]. En los sistemas de un único usuario para alcanzar la ganancia lineal en la capacidad es necesario un alto número de antenas transmisoras y receptoras, mientras que en los canales MIMO multiusuario sólo es necesario establecer ese



número de antenas en las estaciones base para obtener una ganancia similar en la capacidad del sistema.

En el enlace descendente la capacidad crece linealmente con $\min(N_t, K*N_{ri})$, de manera que en un sistema multiusuario al aumentar el número de usuarios presentes en el sistema podremos reducir el número de antenas por usuario simplificando así los móviles, mejora considerable en sistemas móviles limitados por espacio. Por otra parte, debido a la no colaboración entre usuarios, la capacidad de procesamiento conjunto por parte de los usuarios está muy limitada mientras que en la estación base es mucho mayor.

1.2. Decodificadores y Precodificadores

Centrándonos en el enlace descendente los bloques decodificadores se diseñaron para disminuir las consecuencias del paso de las señales transmitidas por el canal, como pueden ser el ruido inherente a su respuesta o las interferencias inter-usuario e intersimbólica (ISI).

Un símbolo recibido, sobre un cierto periodo de tiempo, experimenta interferencia sobre otros símbolos que han sido retrasados debido al efecto multicamino. Al incrementarse la potencia de la señal, también se incrementará la potencia del ISI, este incremento conlleva a un irreducible nivel de error, el cual es independiente del nivel del ruido. Este nivel de error es difícil de analizar, puesto que depende de las características del ISI y de la forma de modulación e incluso las características del ISI dependen de las características del canal y de los símbolos transmitidos [10].

Los decodificadores llevan a cabo un procesamiento de los símbolos recibidos con el objetivo de eliminar las interferencias nocivas del canal a partir de información conocida del canal y las señales recibidas. La realización de este tipo de procesamiento no conlleva grandes problemas en el sentido ascendente ya que la estación base recibe todas las señales implicadas en el sistema y no existe dificultad en aumentar su complejidad con nuevos bloques de procesamiento, sin embargo, en el sentido descendente existen los problemas de la falta de cooperación entre los usuarios (que hace que no se pueda disponer de toda la información necesaria para el procesamiento) y de la falta de complejidad en las terminales (que hace que la capacidad de procesamiento en la decodificación del sentido descendente sea limitada). Este tipo de limitaciones fueron las que promovieron la investigación de cómo diseñar bloques equivalentes a los decodificadores pero que pudieran llevar a cabo el procesamiento de la señal en el extremo transmisor para así conseguir evitarlas. De esta forma surgió la motivación de los precodificadores.



A continuación se pasa a detallar una clasificación entre soluciones óptimas y subóptimas, y dentro de estas últimas lineales y no lineales para decodificadores y precodificadores [14]:

Decodificadores

- Óptimo: **ML**
- Subóptimos
 - Lineales: **ZF, MMSE, Filtro Adaptado**
 - No lineales: **DFE** (Decision Feedback Equalizer)

Precodificadores

- Óptimo: **DPC**
- Subóptimos
 - Lineales: **ZF, MMSE, Filtro Adaptado**
 - No lineales: **Tomlinson – Harashima**

DPC

Costa diseñó el precodificador “*Dirty Paper Code*” [11] que compara la transmisión de información a través de un canal con escribir un mensaje en un papel lleno de otros escritos independientes y con algunos huecos en blanco. Se considera este diseño como óptimo ya se obtiene el máximo de capacidad posible y utilizándose toda la potencia disponible.

Costa explica que con la parte de la potencia disponible del sistema, que podríamos equiparar a los espacios en blanco del papel, va a transmitir la información y que con la potencia restante se podrá intentar eliminar la interferencia o, al menos, paliarla. La complejidad de este diseño es que los códigos a utilizar deben ser escogidos para cumplir con las restricciones de potencia por lo que se debe conocer el estado del canal a la perfección para poder elegir adecuadamente los códigos adaptándose en todo momento al estado del canal.

ZF

Este decodificador busca eliminar la interferencia intersimbólica sin preocuparse de los efectos que su decodificación tenga sobre el ruido. El ruido final ya no va a ser ruido blanco por lo que las prestaciones del sistema no van a ser óptimas. Se implementa en transmisión del mismo modo.

Filtro Adaptado

Tsoulos y Beach [21] diseñaron el filtro adaptado para maximizar la relación señal a ruido en el receptor. Este diseño se puede considerar óptimo



siempre que nos encontremos en sistemas dominados por el ruido, sin embargo, no tiene en cuenta las interferencias que se puedan dar en el sistema.

MMSE

Este filtro se diseña con el único objetivo de minimizar el error cuadrático medio (MSE) del sistema.

DFE

Este diseño fue presentado por Belfore y Park en [22] y está orientado a eliminar la ISI sin incurrir en las desventajas de los filtros previos (amplificación y coloreado de ruido). Para conseguirlo va a utilizar una estructura con realimentación, se va a tratar de una solución no lineal.

Tomlinson – Harashima

Los autores que dan nombre al diseño de precodificador buscaron minimizar el MSE [12] y [13].

Es un precodificador no lineal ya que usa una rama de realimentación para extraer los símbolos que pueden interferir en la transmisión del símbolo actual antes de enviarlo por el canal. La dificultad de este diseño reside en que para el diseño correcto de la rama de realimentación es imprescindible un conocimiento perfecto del estado del canal, lo que no suele ser posible.

Como se puede ver en la clasificación anterior a la hora de diseñar los filtros precodificador y decodificador hay múltiples opciones en función de las necesidades de cada diseño [2]. Se puede buscar maximizar la relación SNR (Filtros adaptados), cancelar la interferencia (ZF) o disminuir el error cuadrático medio (MMSE). En muchos de estos modelos de filtros se fija una potencia máxima con la cual se calcula el resto de parámetros. El motivo de este proyecto es el diseño de un precodificador que necesite la mínima potencia de transmisión. Se trata de un diseño novedoso de precodificador ya que la mayoría de ellos a la hora de ser diseñados no tienen la potencia de transmisión como principal objetivo de optimización.

1.3. Motivación del proyecto.

La motivación de este proyecto se debe a la necesidad de reducir el consumo de Energía en los sistemas de comunicaciones móviles sin empeorar la Calidad de Servicio (QoS). El 80% de la potencia en las comunicaciones móviles se consume en la red Radio de Acceso, concretamente al nivel de las estaciones base



(BS) por lo que la mayoría de los estudios de eficiencia energética ha puesto foco en el Acceso Radio.

Se han propuesto varias técnicas para mejorar la eficiencia en el gasto de energía en las redes de Acceso inalámbricas tales como disminuir el tamaño de la Célula, adaptar el consumo de potencia a la carga de tráfico o la elaboración de estrategias de redes inteligentes [3].

En este proyecto se da una nueva alternativa, a los métodos anteriormente mencionados, de mejora de eficiencia energética con la utilización de precodificadores que optimizan la potencia de transmisión [4].

1.4. Objetivo del proyecto.

El objetivo de este proyecto es comprobar, mediante la simulación y análisis de los resultados obtenidos el desarrollo de precodificadores que optimizan el consumo de potencia en sistemas MIMO multiusuario.

1.5. Estructura del documento.

El documento se va a dividir en tres partes diferenciadas, la primera se dedica a desarrollar los conocimientos sobre sistemas MIMO y precodificadores existentes. La segunda parte desarrolla el Algoritmo de Mínima Potencia y los Métodos GMD y BD-GMD necesarios para la implementación del primero. En la tercera se realiza una evaluación de conclusiones con la ayuda de los datos obtenidos en las simulaciones para los distintos escenarios posibles. Se expondrán también las posibles continuaciones y mejoras del Proyecto.

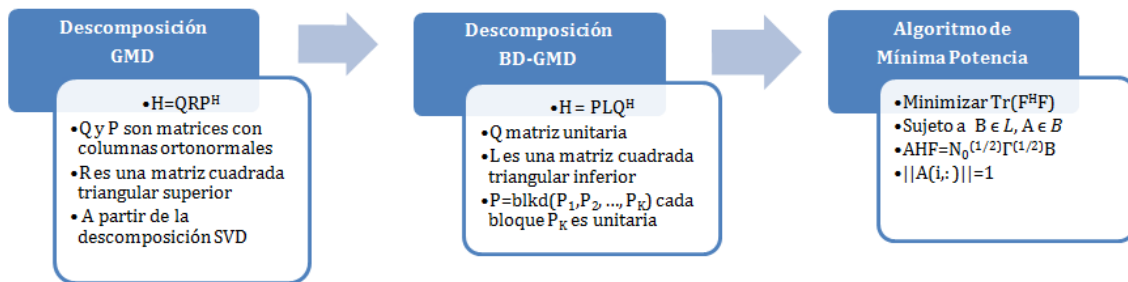
Posteriormente se incluirá el anexo del presupuesto estimado para llevar a cabo en el proyecto.

CAPÍTULO 2

OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA TRANSMITIDA EN PRECODIFICADORES PARA SISTEMAS MIMO MULTIUSUARIO

2. OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA TRANSMITIDA EN PRECODIFICADORES PARA SISTEMAS MIMO MULTIUSUARIO

El objeto de este proyecto es el diseño de precodificadores que optimicen la Potencia de Transmisión [4, 5]. Dichos precodificadores hacen uso de matrices bloque como método subóptimo para disminuir la complejidad del cómputo. Por lo que el algoritmo de Minimización de Potencia hace uso de la descomposición BD-GMD (*Block Diagonal - Geometric Mean Decomposition*) [6, 7, 8]. La descomposición BD-GMD es una versión del método GMD (*Geometric Mean Decomposition*) [9] para matrices bloque. A continuación se muestra el diagrama de bloques del funcionamiento del diseño de estos precodificadores:



2.1. Método GMD

Una matriz compleja H se puede descomponer de la siguiente forma:

$$H = QRP^H$$

Siendo Q y P matrices con columnas ortonormales y R una matriz triangular superior real cuyos elementos diagonales son iguales a la media geométrica de los valores singulares positivos de H . Esta descomposición se denomina “Geometric Mean Decomposition” (Descomposición en Media Geométrica) [9] y tiene aplicaciones en el procesamiento de señal y diseño de Redes de Telecomunicaciones. Esta descomposición suele usarse cuando se trata con sistemas MIMO. La descomposición GMD combinada con el decodificador VBLAST [27] o el precodificador DPC (estudiado en la introducción de este documento) puede descomponer un canal MIMO en múltiples subcanales idénticos entre sí. También se sabe que el esquema GMD es asintóticamente óptimo, con altos valores de SNR, tanto para tasa y como para BER (tasa de error de bit). Además la complejidad computacional del GMD es comparable al esquema del transmisor lineal convencional [5].



Existen otras descomposiciones de matrices:

- Descomposición Schur:

$$H = QUQ^H$$

Donde U es una matriz triangular superior cuyos elementos de la diagonal principal son valores propios de H y Q es una matriz unitaria. Cualquier matriz cuadrada tiene su descomposición Schur.

- Descomposición en valores singulares (SVD):

$$H = V\Sigma W^H$$

Siendo V y W son matrices unitarias y Σ es una matriz diagonal cuyos valores diagonales (σ_i) son valores singulares de H . Cualquier matriz puede descomponerse bajo la descomposición de valores singulares.

Antes de comenzar con el desarrollo del algoritmo se pasa a describir la notación utilizada en el proyecto para el canal de comunicaciones:

- $I_{N \times N}$ es la matriz identidad de tamaño $N \times N$
- $\text{diag}(L)$ es la diagonal principal de la matriz L
- la matriz diagonal bloque $A = \text{blkd}(A_1, A_2, \dots, A_K)$ tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A_K \end{bmatrix}$$

La descomposición que llevamos a estudio, GMD, se basa en la descomposición SVD. La solución de Kosowski y Smoktunowicz [15] comienza por Σ realizando transformaciones ortogonales 2×2 , la solución propuesta en [15] equivale al siguiente enunciado:



$$\begin{aligned} Q_0^T \Sigma P_0 &= R \\ Q &= V Q_0 \\ P &= W P_0 \end{aligned}$$

Se parte de una matriz canal: $H \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times N_{tx}}$, entonces existirán las matrices $P \in \mathbb{C}^{N_{tx} \times N_{tx}}$ y $Q \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times N_{rx}}$ con columnas ortonormales y una matriz triangular superior $R \in \mathbb{R}^{N_{rx} \times N_{tx}}$ obteniendo:

$$H = Q R P^H$$

Donde los elementos de la diagonal de R son todos idénticos entre sí e iguales a la media geométrica de los valores singulares positivos de H . El desarrollo del algoritmo GMD comienza con la descomposición SVD de H .

Recordamos que un sistema MIMO es modelado de la siguiente manera:

$$y = Hx + n \quad (1)$$

Como se ha explicado anteriormente en $H = Q R P^H$, con esta sustitución en H se puede encontrar la expresión equivalente para (1) en:

$$\tilde{y} = R s + \tilde{n} \quad (2)$$

Con el precodificador $x = P s$, con el decodificador $\tilde{y} = Q^H y$ y con el ruido $\tilde{z} = Q^H z$.

Se aplica el concepto del precodificador creado por Tomlinson-Harashima [16] para convertir (2) en M subcanales paralelos desconectados:

$$\tilde{y}_i = r_{ii} s_i + \tilde{n}_i, \quad i = 1, \dots, M$$

El canal con menor r_{ii} será el que tenga mayor tasa de error. Por lo que se busca Q y P que maximicen el mínimo r_{ii} :

Maximizar el mínimo $\{r_{ii}: 1 \leq i \leq M\}$

Sujeto a $Q R P^H = H, Q^H Q = I, P^H P = I$
 $r_{ij} = 0$ para $i > j, R \in \mathbb{R}^{M \times M}$,

A continuación se muestra el algoritmo seguido en la descomposición GMD. El algoritmo de descomposición GMD comienza por la descomposición SVD, $H = V\Sigma W^H$ y genera una secuencia de matrices triangulares superiores $R^{(k)}$, $1 \leq k \leq M$, con $R^{(1)} = \Sigma$, cada $R^{(k)}$ tiene las siguientes propiedades:

- (a) $r_{ij}^{(k)} = 0$ cuando $i > j$ ó $j > \max[k, i]$
- (b) $r_{ii}^{(k)} = \bar{\sigma}$ cuando $i < k$ y la media geométrica de $r_{ii}^{(k)}$, $k \leq i \leq M$, es $\bar{\sigma}$.

Expresamos $R^{(k+1)} = Q_k^T R^{(k)} P_k$ cuando Q_k y P_k son ortogonales para cada k .

Estas matrices ortogonales se construyen usando permutaciones simétricas y rotaciones. Suponemos que $R^{(k)}$ satisface (a) y (b).

Si $r_{kk}^{(k)} \geq \bar{\sigma}$, entonces Π es una matriz permutacional con la propiedad $\Pi R^{(k)} \Pi$ intercambia el elemento $(k+1)$ de la diagonal de $R^{(k)}$ con cualquier elemento r_{pp} , $p > k$, para $r_{pp} \leq \bar{\sigma}$.

Si $r_{kk}^{(k)} < \bar{\sigma}$, entonces Π es elegida para intercambiar el elemento $(k+1)$ de la diagonal de $R^{(k)}$ con cualquier elemento r_{pp} , $p > k$, para $r_{pp} \geq \bar{\sigma}$.

$\delta_1 = r_{kk}^{(k)}$ y $\delta_2 = r_{pp}^{(k)}$ denotan los nuevos elementos de la matriz en las posiciones k y $(k+1)$ asociados a la permutación $\Pi R^{(k)} \Pi$.

Posteriormente se construyen las matrices ortogonales G_1 y G_2 :

$$\bar{\sigma}^{-1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c\delta_1 & c\delta_2 \\ -c\delta_2 & c\delta_1 \end{bmatrix}}_{(G_2^T)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}}_{(\Pi R^{(k)} \Pi)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}}_{(G_1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma} & x \\ 0 & y \end{bmatrix}}_{(R^{(k+1)})} \quad (3)$$

Si $\delta_1 = \delta_2 = \bar{\sigma}$, $c=1$ y $s=0$.

Si $\delta_1 \neq \delta_2$ tenemos:

$$c = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2 - \delta_2^2}{\delta_1^2 - \delta_2^2}} \quad y \quad s = \sqrt{1 - c^2} \quad (4)$$

En cualquier caso:

$$x = \frac{sc(\delta_2^2 - \delta_1^2)}{\bar{\sigma}} \text{ y } y = \frac{\delta_1 \delta_2}{\bar{\sigma}} \quad (5)$$

$\bar{\sigma}$ se encuentra entre δ_1 y δ_2 , s y c son números reales no negativos.

La Figura 2.1. muestra la transformación de $R^{(k)}$ a $G_2^T \Pi R^{(k)} \Pi G_1$. El cuadrado de línea discontinua mostrado en la Figura 2.1. es la submatriz 2x2 expuesta en la ecuación (3). Los valores escalares c y s definidos en (5) que se definen a partir de:

$$c^2 + s^2 = 1 \quad \text{y} \quad (c\delta_1)^2 + (s\delta_2)^2 = \bar{\sigma}^2$$

Con estas identidades, la validación de (4) se obtiene por computación directa, definiendo $Q_k = \Pi G_2$ y $P_k = \Pi G_1$:

$$R^{(k+1)} = Q_k^T R^{(k)} P_k$$

Se desprende de la Figura 2.1., de la ecuación (3) y de la identidad $\det(R^{(k+1)}) = \det(R^{(k)})$ que (a) y (b) se mantienen para $L=k+1$. Por lo tanto existe una matriz triangular superior de valores reales $R^{(k)}$ con $\bar{\sigma}$ en su diagonal, y matrices unitarias Q_i y P_i , $i=1,2,\dots,M$ tales que:

$$R^{(k)} = (Q_{k-1}^T \dots Q_1^T Q_2^T) \Sigma (P_1 P_2 \dots P_{k-1})$$

Combinando esta identidad con la descomposición en valores singulares se obtiene $H = QRP^H$ donde:

$$Q = V \left(\prod_{i=1}^{M-1} Q_i \right), \quad R = R^{(k)}, \quad P = W \left(\prod_{i=1}^{M-1} P_i \right)$$

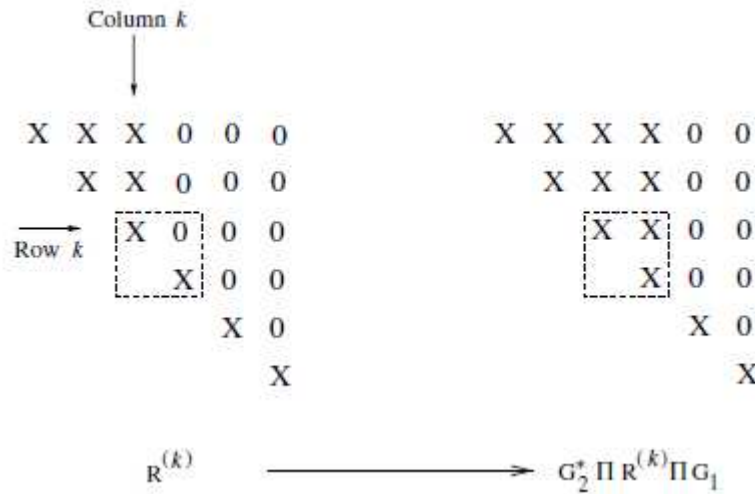


Figura 2.1. Transformación de $R^{(k)}$ a $G_2^T \Pi R^{(k)} \Pi G_1$

El resumen del algoritmo de descomposición GMD basado inicialmente en la descomposición SVD se muestra a continuación:

- (1) Se tiene $H = V\Sigma W^H$, la descomposición en valores singulares de H , y se inicializa $Q = V$, $P = W$, $R = \Sigma$ y $k = 1$.
- (2) Si $r_{kk} \geq \bar{\sigma}$, se elige $p > k$ tal que $r_{pp} \leq \bar{\sigma}$. Si $r_{kk} < \bar{\sigma}$, se elige $p > k$ tal que $r_{pp} \geq \bar{\sigma}$. En R , P y Q se realizan los siguientes cambios:

$$\begin{aligned} r_{k+1,k+1} &\leftrightarrow r_{pp} \\ P_{:,k+1} &\leftrightarrow P_{:,p} \\ Q_{:,k} &\leftrightarrow Q_{:,p} \end{aligned}$$

- (3) Se construyen las matrices G_1 y G_2 como se ha mostrado en (4). Se cambia R por $G_2^T R G_1$, reemplazando Q por $Q G_2$ y P por $P G_1$.
- (4) Si $k=M-1$, se ha llegado al final del algoritmo, $Q R P^H$ es la descomposición GMD de H , en otro caso se cambia $k \leftarrow k + 1$ y se pasa al punto 2 de nuevo.

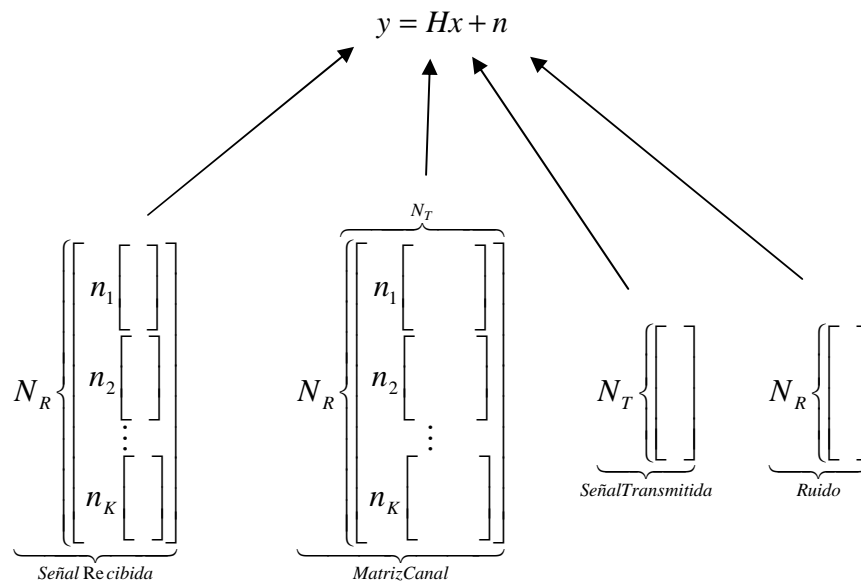
2.2. Método BD-GMD

La descomposición en media geométrica (GMD) [9] se ha propuesto para las comunicaciones punto-a-punto, suponiendo CSIT (*Channel State Information at the Transmitter*). Combinado con técnicas no lineales, tales como DFE o DPC, un sistema MIMO se descompone en múltiples subcanales idénticos. Por lo tanto la misma constelación se puede utilizar en diferentes subcanales, reduciendo en gran medida la complejidad del transceptor. Para un canal MIMO BC, con CSIT, GMD se ha generalizado al diagonal bloque (BD)-GMD [6, 7]. Cuando se combina con DPC, un canal de difusión crea subcanales MIMO con SNR idénticos para cada usuario. Las tasas de los diferentes usuarios pueden ser diferentes, o incluso definirse bajo la restricción de que sean iguales.

En la práctica los usuarios están situados a diferente distancia de la estación base (BS), por lo que la atenuación que sufren es distinta lo que puede implicar diferentes SNR y posibles diferentes tasas. Aunque los requerimientos de tasa para todos los usuarios fuesen iguales, el hecho de tener distintas atenuaciones lleva a necesitar diferentes relaciones señal a ruido objetivo para cada uno de los usuarios y esto se debe tener en cuenta los precodificadores.

2.2.1. Modelo de Canal

Se tiene un sistema celular con una BS, K usuarios móviles, considerando un sistema MIMO BC. La BS tiene N_t antenas y el usuario i tiene n_i antenas de tal manera que el número total de antenas receptoras es $N_r = \sum n_i$. Siendo $N_t \geq N_r$. La relación entrada-salida del canal se representa con la ecuación:



siendo x el vector de señal de transmisión $N_T \times 1$, y es la señal recibida $N_R \times 1$, $y = [y_1^T, \dots, y_K^T]^T$ cada y_i es el vector $n_i \times 1$ de señal recibida del usuario i . La SNR de cada canal del usuario i es γ_i . $H = [H_1^T, \dots, H_K^T]^T$ donde cada H_i es el canal del usuario i . Asumimos que el vector de ruido n es CSCG (*zeromean circularly symmetric complex Gaussian*) con $E[nn^H] = N_0 I$, y n es independiente de x . Asumimos $E[||x||^2] = E_s$. Denotándose el enlace descendente por $N_t \times [n_1, \dots, n_K]$. Anteriormente se muestra el modelo de canal multiusuario que se está estudiando en el proyecto [18].

2.2.2. Descripción y desarrollo del algoritmo

En el caso de que algunos de los usuarios móviles tengan múltiples antenas, parte de la compensación del canal se puede hacer de forma lineal en el lado del receptor, mediante un conjunto matrices. Esta ecualización sólo se puede hacer para los flujos de datos del mismo usuario, y no entre los usuarios. Se puede representar como una pre-multiplicación de la señal recepción y por una matriz diagonal bloque A : $A = \text{diag}(A_1; \dots; A_K)$, donde cada bloque A_i es la matriz de ecualización $n_i \times n_i$ del usuario i . Cada fila de A_i está normalizada de modo que el vector de ruido n no se va a ver amplificado por A . La situación en la que los usuarios móviles tienen antenas individuales está representado por el caso $A = I$. Para cumplir con estos requerimientos se asume que A es unitaria.

La descomposición BD-GMD se enuncia de la siguiente manera:

$$H = PLQ^H \quad (6)$$

H es la matriz canal a descomponer de tamaño $N_r \times N_t$, y $\{n_1, \dots, n_K\}$ el número de antenas de cada usuario receptor de tal manera que el número total de antenas receptoras es: $N_r = \sum_{i=1}^K n_i$.

Las matrices en las que se descompone H bajo la descomposición BD-GMD son:

- $P = \text{blkd}(P_1, P_2, \dots, P_K)$, P tiene tamaño $N_r \times N_r$, cada bloque P_i es una matriz $n_i \times n_i$ unitaria
- Q es una matriz semi-unitaria $N_r \times N_t$ de tal manera que: $Q^H Q = I_{N_r}$ pero $Q Q^H \neq I_{N_t}$

- L es una matriz triangular inferior cuadrada ($N_r \times N_r$) cuyos elementos diagonales de cada bloque son idénticos (*"block-equal-diagonal"*).

El objetivo del algoritmo es encontrar una descomposición tal como la mostrada en (6) y cuya diagonal de L sean elementos idénticos para cada bloque.

El algoritmo que soluciona el problema propuesto $H = PLQ^H$ (BD-GMD) se basa en la división por bloques de H e ir realizando los pasos explicados a continuación de manera recursiva sobre cada bloque hasta llegar al último.

$$H = PLQ^H \quad (6)$$

El primer paso divide las matrices en dos bloques:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_1 \\ \tilde{H} \end{bmatrix}}_{H \text{ } N_R \times N_T} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix}}_{P \text{ } N_R \times N_R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ \Xi & \tilde{L} \end{bmatrix}}_{L \text{ } N_R \times N_R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^H \\ \tilde{Q}^H \end{bmatrix}}_{Q^H \text{ } N_R \times N_T} \quad (7)$$

Donde aparecen las subdivisiones de H, P, L, Q :

- H_1 : primer bloque de H de tamaño $n_1 \times N_t$
- \tilde{H} : el bloque restante de H al quitarle H_1 , resto de usuarios
- P_1 : ecualizador del primer usuario, de tamaño $n_1 \times n_1$
- \tilde{P} : el bloque restante del ecualizador P , resto de usuarios
- L_1 : primer elemento diagonal bloque de la matriz L , de tamaño $n_1 \times n_1$
- \tilde{L} : el bloque restante de la matriz triangular L , resto de usuarios
- Ξ : primer elemento de la matriz L que no pertenece a la diagonal
- Q_1^H : primer bloque de Q^H de tamaño $n_1 \times N_t$
- \tilde{Q}^H : el bloque restante de Q^H al quitarle Q_1^H , resto de usuarios

Esta primera división se puede desarrollar en dos ecuaciones:

$$H_1 = P_1 L_1 Q_1^H \quad (8)$$

$$\tilde{H} = \tilde{P} \Xi Q_1^H + \tilde{P} \tilde{L} \tilde{Q}^H \quad (9)$$

La ecuación (8) muestra el mismo formato del algoritmo GMD salvo por pequeñas diferencias:

- GMD: $H = QRP^H$
- Ecuación (4) del algoritmo BD-GMD: $H_1 = P_1 L_1 Q_1^H$

En el caso del algoritmo GMD se tenía: P y Q matrices unitarias, R matriz triangular superior.

En el caso del algoritmo BD-GMD para un solo bloque se tiene: P y Q matrices unitarias, L matriz triangular inferior.

Al operar la ecuación (8) del algoritmo BD-GMD se va a obtener la ecuación del algoritmo GMD de la siguiente manera:

Se parte de la ecuación del algoritmo GMD:

$$H_{GMD} = QRP^H$$

Se tiene la ecuación del algoritmo BD-GMD:

$$H_{BD-GMD} = PLQ^H$$

Se hace la traspuesta conjugada de la matriz canal BD-GMD (H_{BD-GMD}):

$$(H_{BD-GMD})^H = (PLQ^H)^H = QL^H P^H$$

Se igualan ambas ecuaciones:

$$\underbrace{QL^H P^H}_{(H_{BD-GMD})^H} = \underbrace{QRP^H}_{H_{GMD}}$$

L es una matriz cuadrada triangular inferior, R es una matriz cuadrada triangular superior, por lo que se obtiene que:

$$L = R^H$$

Como se ha explicado anteriormente para resolver la ecuación (8) se utiliza el método GMD para haciendo la traspuesta conjugada del primer bloque de H_{BD-GMD} (H_1) y una vez calculados Q_1 , P_1 y R_1 , se obtiene la traspuesta conjugada de R_1 para obtener L_1 . De esta forma ya tendría solución la ecuación (8).

Para resolver la ecuación (9), que cuenta con 4 incógnitas: \tilde{P} , \tilde{L} , \tilde{Q}^H y Ξ , hacemos uso de dos ecuaciones propuestas por [6,7].

$$\tilde{H}(I - Q_1 Q_1^H) = \tilde{P} \tilde{L} \tilde{Q}^H \quad (10)$$

$$\Xi = \tilde{P}^H \tilde{H} Q_1 \quad (11)$$

La ecuación (10), matriz proyección $I - Q_1 Q_1^H$, soluciona el hecho de que Q_1 y \tilde{Q} han de ser ortogonales entre sí para cumplir los requisitos del algoritmo y encontrar solución para la descomposición BD- GMD.

La Figura 2.2. muestra el diseño de un transceptor con descomposición BD- GMD:

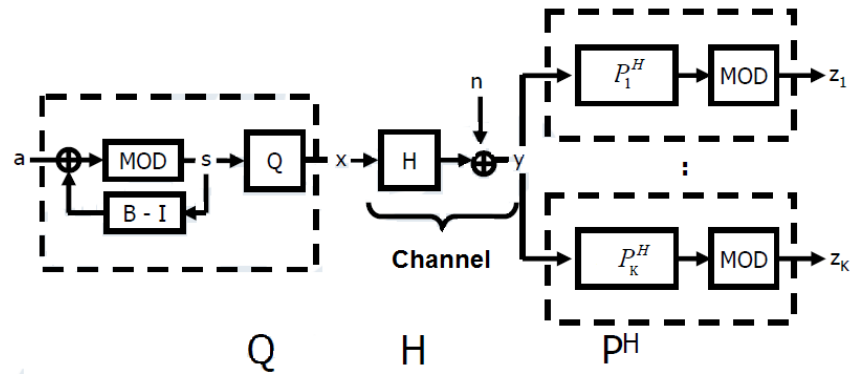


Figura 2.2. Diseño de Transceptor descomposición BD-GMD [18]

2.2.3. Ejemplo matriz $H_{6 \times 6}$

Para entender el algoritmo se expone un ejemplo que explique paso a paso el desarrollo del mismo. El ejemplo que se muestra a continuación tiene las siguientes características:

- Número de antenas transmisoras: $N_T=6$
- Número de antenas receptoras: $N_R=6$ divididas en 3 usuarios de manera equivalente: $N_R=[2 \ 2 \ 2]$
- Número de usuarios: $K=3$, por lo que el algoritmo Diagonal Bloque GMD se subdividirá en 3 canales idénticos de 2 antenas cada uno.
- Matriz H :

$$H_{\substack{6 \times 6 \\ N_R \times N_T}} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{cases} H_1 \ 2 \times 6 \\ H_2 \ 2 \times 6 \\ H_3 \ 2 \times 6 \end{cases}$$

- Matriz Q :

$$Q^H_{\substack{6 \times 6 \\ N_R \times N_T}} = \begin{bmatrix} Q_1^H \\ Q_2^H \\ Q_3^H \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{cases} Q_1^H \ 2 \times 6 \rightarrow Q_1 \ 6 \times 2 \\ Q_2^H \ 2 \times 6 \rightarrow Q_2 \ 6 \times 2 \\ Q_3^H \ 2 \times 6 \rightarrow Q_3 \ 6 \times 2 \end{cases} \rightarrow Q_{\substack{6 \times 6 \\ N_T \times N_R}} = [Q_1 \ Q_2 \ Q_3]_{6 \times 6}$$

- Matriz L :

$$L_{\substack{6 \times 6 \\ N_R \times N_R}} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ \Xi_{21} & L_2 & 0 \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & L_3 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{cases} L_1 \ 2 \times 2 \\ L_2 \ 2 \times 2 \\ L_3 \ 2 \times 2 \\ \begin{bmatrix} \Xi_{21} \\ \Xi_{31} \end{bmatrix}_{4 \times 2} \\ \Xi_{32} \ 2 \times 2 \end{cases}$$

Siendo a su vez las submatrices de L matrices cuadradas triangulares superiores con elementos diagonales idénticos en cada bloque, como ejemplo se muestra la submatriz de L , L_1 , primer bloque:

$$L_1 \underbrace{2 \times 2}_{n_1 \times n_1} = \begin{bmatrix} L_{1A} & 0 \\ \Xi & L_{1A} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

- Matriz P :

$$P \underbrace{6 \times 6}_{N_R \times N_R} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \begin{cases} P_1 \ 2 \times 2 \\ P_2 \ 2 \times 2 \\ P_3 \ 2 \times 2 \end{cases}$$

Siendo a su vez las submatrices de P matrices cuadradas unitarias, como ejemplo se muestra la submatriz de P , P_1 , primer bloque:

$$P_1 \underbrace{2 \times 2}_{n_1 \times n_1} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Los pasos a seguir en el algoritmo de descomposición en matrices BD-GMD son:

Paso 1. Enunciado del algoritmo y primera división en submatrices (H_1 y H) explicado anteriormente:

$$H = PLQ^H$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_1 \\ \tilde{H} \end{bmatrix}}_H \underbrace{N_R \times N_T}_{N_R \times N_T} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{bmatrix}}_P \underbrace{N_R \times N_R}_{N_R \times N_R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ \Xi & \tilde{L} \end{bmatrix}}_L \underbrace{N_R \times N_R}_{N_R \times N_R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1^H \\ \tilde{Q}^H \end{bmatrix}}_{Q^H} \underbrace{N_R \times N_T}_{N_R \times N_T}$$

$$H_1 = P_1 L_1 Q_1^H$$

$$\tilde{H} = \tilde{P} \Xi Q_1^H + \tilde{P} \tilde{L} \tilde{Q}^H$$

Paso 2. Cálculo de H_1 a partir de GMD como se ha visto anteriormente. Tenemos H_1 y para obtener la descomposición en (8) se hace uso del algoritmo GMD conocido, simplemente haciendo la traspuesta conjugada de H_1 , de ahí ya obtendríamos Q_1 y P_1 , para conseguir L_1 solo tendríamos que hacer la conjugada traspuesta de R_1 :

$$H_1 = P_1 L_1 Q_1^H$$

$$H_{\text{GMD}} = Q_1 R_1 P_1^H$$

$$(H_{\text{GMD}})^H = (Q_1 R_1 P_1^H)^H = P_1 R_1^H Q_1^H$$

$$H_{\text{BD-GMD}} = P_1 L_1 Q_1^H$$

Se igualan ambas ecuaciones obteniendo P_1 y Q_1 :

$$\underbrace{P_1 L_1 Q_1^H}_{H_{\text{BD-GMD}}} = \underbrace{P_1 R_1^H Q_1}_{(H_{\text{GMD}})^H}$$

Y se obtiene L_1 :

$$L_1 = R_1^H$$

Paso 3. Desarrollo de la ecuación (9). Estamos en la primera subdivisión, por lo que \tilde{H} muestra el resto de bloques de H una vez se ha quitado H_1 :

$$\tilde{H} = \tilde{P} \tilde{\Xi} Q_1^H + \tilde{P} \tilde{L} \tilde{Q}^H \quad (9)$$

$$H_{\text{aux}} = \tilde{H} (I - Q_1 Q_1^H) = \tilde{P} \tilde{L} \tilde{Q} \quad (10)$$

Se usa la ecuación (10) para resolver paso a paso la (9). Se usa la matriz proyección ortogonal $(I - Q_1 Q_1^H)$ multiplicada a \tilde{H} para obtener \tilde{Q} ortogonal a Q_1 .

Una vez se ha obtenido H_{aux} como la multiplicación de $\tilde{H}(I - Q_1 Q_1^H)$ nos quedamos con el segundo bloque de H_{aux} para poder obtener P_2 , L_2 y Q_2 a partir de realizar el algoritmo GMD a H_{aux} .

Al solucionar esta ecuación para H_{aux} (2x6) tendremos:

- $H_{2 \times 6}$
- $R_{6 \times 2} \rightarrow$ nos quedamos con $R_{2 \times 2}$ ya que las últimas 4 filas de R son ceros.
- $P_{2 \times 2}$
- $Q_{6 \times 2} \rightarrow$ nos quedamos con $Q_{6 \times 2}$ ya que al multiplicar $Q \times R$ y R tener solo 2 filas, las últimas 4 filas de Q no cuentan en el cálculo.

Además de eliminar las filas innecesarias de R y Q , como se ha explicado antes, vamos a rellenar el hueco del segundo bloque en cada una de las matrices P , L y Q totales:

- $P_2 = P_{2 \times 2}$
- $L_2 = R_{2 \times 2}$ traspuesta conjugada como ya hemos visto anteriormente
- $Q_2 =$ de $Q_{6 \times 2}$

De esta forma ya habríamos calculado los dos primeros bloques de P , L y Q , sólo nos quedaría el último bloque (H_3) y dar solución a la ecuación (11).

Paso 4. Dividimos \tilde{H} en H_2 y H_3 para calcular la descomposición de H_3 :

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ \Xi_2 & L_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_2^H \\ Q_3^H \end{bmatrix}$$

$$H_3 - aux = H - aux(I - Q_{12} Q_{12}^H) = P_3 L_3 Q_3^H$$

H_{3_aux} es la multiplicación del último bloque de H_{aux} por la matriz proyección ortogonal $I - Q_{12}Q_{12}^H$, calculada en el paso 3, no se usa directamente H_3 ni H_{aux} ya que se busca que Q_1 , Q_2 y Q_3 sean ortogonales para que el algoritmo cumpla los requisitos. De ahí que se use el último bloque de H_{aux} , ya que Q_2 se calculó a partir de dicha matriz. Además de usar H_{aux} multiplicamos por la matriz proyección ortogonal $I - Q_{12}Q_{12}^H$ para que Q_3 sea ortogonal a Q_1 y Q_2 .

Como en el paso 3, se utiliza el algoritmo GMD obteniendo:

- $H_{2 \times 6}$
- $R_{6 \times 2} \rightarrow$ nos quedamos con $R_{2 \times 2}$ ya que las últimas 4 filas de R son ceros.
- $P_{2 \times 2}$
- $Q_{6 \times 6} \rightarrow$ nos quedamos con $Q_{6 \times 2}$ ya que al multiplicar $Q \times R$ y R tener solo 2 filas, las últimas 4 filas de Q no cuentan en el cálculo.

Además de eliminar las filas innecesarias de R y Q , como se ha explicado antes, vamos a rellenar el hueco del tercer bloque en cada una de las matrices P , L y Q totales:

- $P_3 = P_{2 \times 2}$
- $L_3 = R_{2 \times 2}$ traspuesta conjugada como ya hemos visto anteriormente
- $Q_3 = Q_{6 \times 2}$

Las matrices totales P y Q están formadas completamente a partir de P_1 , P_2 y P_3 por un lado y Q_1 , Q_2 y Q_3 por otro. Ahora se pasa a rellenar los huecos vacíos de la matriz L .

Paso 5. Completar la matriz L :

$$\Xi = \tilde{P}^H \tilde{H} Q_1 \quad (11)$$

Por [6, 7] se conoce la ecuación (11) que sirve para rellenar los huecos de la matriz L :

$$L_{\substack{6 \times 6 \\ N_R \times N_R}} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ \Xi_{21} & L_1 & 0 \\ \Xi_{31} & \Xi_{32} & L_1 \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad \text{y} \quad \Xi_1 = \begin{bmatrix} \Xi_{21} \\ \Xi_{31} \end{bmatrix}$$

En realidad las matrices Ξ_{21} y Ξ_{31} son una matriz en sí Ξ_1 (4x2) y la matriz Ξ_{32} es una matriz (2x2). El cálculo sería:

$$\Xi_1 = \tilde{P}^H \tilde{H} Q_1$$

$$\Xi_{32} = P_3^H H_3 Q_1$$

De este modo ya se habrán completado la descomposición BD-GMD del ejemplo de una matriz $H_{6 \times 6}$ con 3 usuarios con distribución idéntica de antenas receptoras por usuario. Ya se habrán calculado las matrices P , Q y L completas que multiplicadas de la forma de la ecuación (6) obtendrían la matriz H de partida.

Para comprobar que el algoritmo es correcto se pasa a mostrar la solución para este ejemplo en la Figura 2.3. Para verificar el correcto funcionamiento del algoritmo se pasa a comprobar que $H - PLQ^H \cong 0$ y el resultado corresponde a lo esperado:

H-PLQ' =

1.0e-14 *						
-0.0167	-0.0111 + 0.0014i	0	0	-0.0111 + 0.0111i	-0.0111	
0 + 0.0153i	-0.0111 - 0.0333i	0	-0.0111	0.0153 + 0.0111i	0.0139 - 0.0111i	
-0.0056	0.0222	-0.0111 + 0.0444i	0.0111 - 0.0111i	0	-0.0222 + 0.0069i	
-0.0444 - 0.0666i	-0.0444 - 0.0666i	-0.0389 - 0.0094i	-0.0097 - 0.0777i	-0.0194 - 0.0069i	-0.0500 - 0.0167i	
0.0444 - 0.0333i	-0.0111 + 0.0028i	0.1110 + 0.0007i	0.0139 - 0.0222i	0.0042 + 0.0444i	-0.0278 + 0.0333i	
0.0278 - 0.0083i	0.0056	0.0444 + 0.0555i	0.0083 - 0.0056i	0 + 0.0222i	-0.0208 + 0.0056i	

Figura 2.3. Comprobación del correcto funcionamiento del algoritmo BD-GMD

Para cada uno de los miembros de la matriz $H_{6 \times 6}$ se observa como el error de $H - PLQ^H$ tiende a cero (valores entorno a la 10^{-14}).

Otra comprobación a llevar a cabo sería corroborar que la matriz Q es unitaria, como se define en el algoritmo de BD-GMD, probamos que $I - Q^H Q \approx 0$ en la Figura 2.4. a continuación y se prueba lo esperado. Valores error muy aceptables, de entorno a 10^{-14} .

$I - Q^H Q =$

1.0e-14 *									
-0.1110	-0.0375 + 0.0337i	-0.0805 + 0.0583i	0.0111 + 0.0666i	0.0194 - 0.0430i	-0.1402 + 0.0916i				
-0.0375 - 0.0337i	0.0666	0.0486 + 0.0160i	-0.0361 + 0.1554i	0.1617 + 0.0361i	-0.1402 - 0.0520i				
-0.0805 - 0.0583i	0.0486 - 0.0160i	0.0333	-0.0104 + 0.1693i	0.1540 + 0.0111i	-0.1967 - 0.0111i				
0.0111 - 0.0666i	-0.0361 - 0.1554i	-0.0104 - 0.1693i	0.0999	0.0777 - 0.1388i	-0.1017 - 0.0083i				
0.0194 + 0.0430i	0.1617 - 0.0361i	0.1540 - 0.0111i	0.0777 + 0.1388i	0.2220	-0.0444 + 0.0673i				
-0.1402 - 0.0916i	-0.1402 + 0.0520i	-0.1967 + 0.0111i	-0.1017 + 0.0083i	-0.0444 - 0.0673i	-0.1998				

Figura 2.4. Comprobación Q unitaria

H=						
H1	0.1781 + 0.2982i	0.2089 + 0.0809i	0.7455 + 0.3381i	0.1341 + 0.6035i	0.4417 + 0.6925i	0.4561 + 0.6079i
	0.3596 + 0.0464i	0.9052 + 0.7772i	0.7363 + 0.2940i	0.2126 + 0.5261i	0.0133 + 0.5567i	0.1017 + 0.7413i
H2	0.0567 + 0.5054i	0.6754 + 0.9051i	0.5619 + 0.7463i	0.8949 + 0.7297i	0.8972 + 0.3965i	0.9954 + 0.1048i
	0.5219 + 0.7614i	0.4685 + 0.5338i	0.1842 + 0.0103i	0.0715 + 0.7073i	0.1967 + 0.0616i	0.3321 + 0.1279i
H3	0.3358 + 0.6311i	0.9121 + 0.1092i	0.5972 + 0.0484i	0.2425 + 0.7814i	0.0934 + 0.7802i	0.2973 + 0.5495i
	0.1757 + 0.0899i	0.1040 + 0.8258i	0.2999 + 0.6679i	0.0538 + 0.2880i	0.3074 + 0.3376i	0.0620 + 0.4852i

L=						
L1						
1.3465	0	0	0	0	0	0
-1.4915	1.3465	0	0	0	0	0
-1.3702 + 0.3045i	0.6323 + 0.6892i	1.0743	0	0	0	0
1.3195 - 0.5562i	-0.4878 - 0.2932i	-0.4912	1.0743	0	0	0
-1.7184 + 0.0740i	1.0824 - 0.0842i	0.4585 - 0.1017i	0.1390 + 0.1227i	0.1488	0	0
-0.0447 + 0.3246i	0.2891 + 0.2918i	-0.2342 + 0.1012i	-0.4433 + 0.1715i	-0.4350	0.1488	0

P=						
P1						
-0.9881	0.1537	0	0	0	0	0
0.1510 + 0.0284i	0.9711 + 0.1824i	0	0	0	0	0
0	0	0.3359	-0.9419	0	0	0
0	0	0.9358 - 0.1068i	0.3338 - 0.0381i	0	0	0
0	0	0	0	0.8705	-0.4922	0
0	0	0	0	0.3756 + 0.3180i	0.6643 + 0.5625i	0

Q=						
Q1		Q2		Q3		
-0.0894 + 0.2212i	0.1870 + 0.2263i	-0.0354 - 0.6296i	0.4403 - 0.2736i	-0.2807 - 0.2020i	-0.1245 + 0.2354i	
-0.0354 - 0.0088i	0.7427 - 0.4569i	0.3794 - 0.0704i	-0.0404 + 0.1979i	-0.0450 + 0.0228i	0.1958 + 0.0879i	
-0.4584 + 0.2307i	0.1482 + 0.1047i	-0.4693 - 0.0629i	0.1279 + 0.5769i	0.0592 + 0.3437i	-0.0517 - 0.0788i	
-0.0635 + 0.3883i	0.1696 + 0.0107i	-0.0259 - 0.2715i	-0.4404 - 0.1922i	0.4801 - 0.2330i	-0.2331 - 0.4145i	
-0.3109 + 0.4461i	-0.2090 + 0.0154i	0.0359 + 0.1405i	-0.1892 + 0.0629i	-0.1299 - 0.4283i	0.5946 + 0.2140i	
-0.3077 + 0.3651i	-0.1150 - 0.1858i	0.2788 + 0.2369i	-0.1826 - 0.1934i	-0.4374 + 0.2825i	-0.4948 + 0.0612i	

Figura 2.5. Resultado algoritmo BD-GMD

En la Figura 2.5. se muestra el resultado de la ejecución del algoritmo BD-GMD codificado.



Se observa como L tiene forma de matriz cuadrada triangular inferior, que para cada bloque los elementos de la diagonal son idénticos. Otro punto a destacar sería que los elementos de la diagonal de la matriz L muestran una ordenación decreciente intrínseca al diseño del algoritmo BD-GMD.

Se comprueba el formato de matriz bloque de P y como se ha mostrado en la Figura 2.4. el carácter de matriz unitaria de Q . También se ha probado que cada bloque de P corresponde a matrices unitarias, otro de los requisitos del algoritmo.

2.2.4. Aplicaciones diseñadas a partir de BD-GMD

El algoritmo BD-GMD combinado con otros métodos, como el DPC, puede especializarse en dos grupos:

- Esquemas basados en ZF de baja complejidad:
 - Tasa igual por Bloque (*Block equal rate*). Subcanales con la misma SNR para cada usuario mientras que la tasa puede ser diferente para cada usuario.
 - Misma tasa para todos los usuarios (*Equal rate*). La potencia se controla para obtener la óptima tasa total (*Sum rate*).
- MMSE alta complejidad, BD-UCD (Descomposición de canal uniforme) [23].
 - BD-UCD, dualidad UL&DL. Consigue la tasa total de Capacidad [24, 25].
 - BD-UCD, misma tasa.



2.3. Desarrollo del método de Mínima Potencia

La descomposición GMD [9] se ha propuesto para comunicaciones punto a punto, asumiendo CSIT combinándolo con técnicas no lineales como DFE o DPC se obtiene de un sistema MIMO múltiples canales idénticos reduciendo la complejidad del sistema.

Para los sistemas MIMO BC, con CSIT, la descomposición GMD se generaliza pasando a ser (*block diagonal*) BD-GMD. Combinándolo con un precodificador DPC se consiguen subcanales con idéntica SNR.

En nuestro diseño se busca minimizar la potencia de cada BS individual manteniendo los requerimientos de tasa de cada grupo de usuarios.

En otras líneas de investigación se han barajado técnicas de minimización de potencia como IB (*Interference Balancing*) de carácter óptimo pero demasiado complejo computacionalmente. También se ha estudiado la optimización convexa [26], cuyo problema es el alto número de iteraciones necesarias hasta encontrar la solución óptima. En este PFC se busca una técnica cuya complejidad computacional sea razonable y obtenga un buen rendimiento, aunque subóptima se acerque a la solución óptima.

2.3.1. Algoritmo de Minimización de Potencia para una ordenación arbitraria

Existe una relación simple entre la tasa y la SNIR (ρ_i) de cada subcanal:

$$R_i = \log_2(1 + \rho_i)$$

Por lo que los requerimientos de tasa se trasladan a la SNR.

Se asume una ordenación en la que se codifican los usuarios de forma fijada de antemano por la estructura de la matriz. Este esquema minimiza la potencia con la limitación de la interferencia entre usuarios. El ecualizador lineal del receptor se representa por la matriz diagonal bloque A , donde $A = \text{blkd}(A_1, A_2, \dots, A_K)$, cada bloque A_i es la matriz de ecualización del receptor del usuario i . Gracias al método BD-GMD, explicado en el punto 2.2, la matriz del canal H se puede representar por:

$$H = PLQ^H$$

Donde $P = \text{blkd}(P_1, P_2, \dots, P_K)$, cada bloque P_i es una matriz $n_i \times n_i$ unitaria, $Q^H Q = I_{NR}$ y L es una matriz triangular inferior cuadrada cuyos elementos diagonales de cada bloque son idénticos ("block-equal-diagonal").

[4]: El problema de Minimización de Potencia se formula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \text{Tr}(F^H F) \\ & \text{Sujeto a } B \in L, A \in B \\ & AHF = \sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} B \\ & \|A(i, :)\| = 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Donde L es el conjunto de matrices triangulares con diagonal unidad, B es el conjunto de matrices diagonal bloque, F es el precodificador y Γ es la matriz diagonal de los requerimientos de SNR, $\Gamma = \text{blkd}(\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_K)$ donde $\Gamma_i = \gamma_i I_{n_i}$

La matriz de canal H se puede descomponer según el método BD-GMD de la siguiente manera $H = PLQ^H$, y Λ es la matriz diagonal de L , tal que $\Lambda = \text{diag}(L) = \text{blkd}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_K)$ donde $\Lambda_i = r_i I_{n_i}$. Por lo que el problema de Minimización de Potencia queda resuelto por:

$$\Omega = \sqrt{N_0} \cdot \Gamma^{1/2} \cdot \Lambda^{-1}$$

$$F = Q \cdot \Omega$$

$$A = P^H$$

$$B = \Omega^{-1} \cdot \Lambda^{-1} \cdot L \cdot \Omega$$

Donde Ω es la matriz diagonal de asignación de potencia, $\Omega = \text{blkd}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_K)$ donde $\Omega_i = \omega_i I_{n_i}$, obteniéndose la mínima potencia como:

$$E_s = \text{Tr}(F^H F) = \text{Tr}(\Omega^2)$$

El desarrollo de esta solución viene dado por el operador Lagrangiano $\mathcal{L}(F, A, \alpha, \tilde{\rho}, \mu)$:

$$\text{Tr} \left(F^H F + \text{Re} \left(\tilde{\rho} \left(AHF - \sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} B \right) \right) + \mu (AA^H - I) \right)$$

Donde $\tilde{\rho}$, μ son multiplicadores Lagrangianos, $\tilde{\rho}$ una matriz compleja triangular superior, μ una matriz diagonal de valores reales y $\text{Re}(-)$ es la parte real de una matriz compleja. Si F y A son óptimos, entonces se satisfacen las ecuaciones:

$$\nabla_F \mathcal{L} = 2F + (AH)^H \tilde{\rho} = 0$$

$$\nabla_A \mathcal{L} = \left| \tilde{\rho}(HF)^H \right|_k + 2\mu_k A_k = 0 \quad \text{para } 1 \leq k \leq K$$

Donde A_k , μ_k y $\left| \tilde{\rho}(HF)^H \right|_k$ son el elemento k de sus matrices diagonal bloque correspondiente. Suponiendo $\rho = -\frac{1}{2} \tilde{\rho}$ también triangular superior:

$$F = H^H A^H \rho$$

Se define $\bar{J} = \sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} B$, matriz triangular inferior:

$$\begin{aligned} \mu_k A_k A_k^H &= \left[-\frac{1}{2} \tilde{\rho} F^H H^H \right]_k A_k^H \\ &= \left[\rho F^H H^H \right]_k A_k^H \\ &= \left[\rho F^H H^H A^H \right]_k \\ &= \left[\rho \bar{J}^H \right]_k \end{aligned}$$

Sabiendo que μ_k es diagonal, $A_k A_k^H$ es triangular superior, además es hermítica lo que la convierte en diagonal.

$$(\bar{J}^H) \rho = (F^H H^H A^H) \rho = F^H F$$

Como $F^H F$ es triangular superior y hermítica es diagonal:

$$F^H F = \text{diag}(\rho) \sqrt{N_0} \Gamma^{1/2}$$

Los elementos diagonales de $F^H F$ son reales positivos, por tanto la diagonal de ρ es real positiva también. Si definimos,

$$\bar{\Lambda} = (F^H F)^{-1/2}$$

Donde $\bar{\Lambda}$ es una matriz diagonal de elementos reales positivos enteros, por lo tanto:



$$(F\bar{\Lambda})^H \cdot (F\bar{\Lambda}) = I$$

Denotamos Q como la matriz unitaria $F\bar{\Lambda}$, por lo que:

$$AHF\bar{\Lambda} = AHQ = \bar{J} \cdot \bar{\Lambda}$$

$$H = A^H (\bar{J} \cdot \bar{\Lambda}) Q^H$$

Donde $\bar{J} \cdot \bar{\Lambda}$ es una matriz triangular inferior. Denominamos $L = \bar{J} \cdot \bar{\Lambda}$. Por lo que $\text{diag}(L) = \sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} \bar{\Lambda}$. El elemento k de la diagonal bloque de L corresponde al usuario k , lo denominamos: $[L]_k$ siendo γ_k el requerimiento de SNR del usuario k :

$$\begin{aligned} \det([L]_k) &= \det([\bar{J}]_k) \det([\bar{\Lambda}]_k) \\ &= (\sqrt{N_0} \gamma_k)^{n_k} \det([\bar{\Lambda}]_k) \end{aligned}$$

Se define $\hat{H}_k^T = [H_1^T, \dots, H_k^T]^T$. Como A es diagonal bloque unitaria y Q es unitaria, podemos escribir:

$$\det([L]_k) = \sqrt{\frac{\det(\hat{H}_k \hat{H}_k^H)}{\det(\hat{H}_{k-1} \hat{H}_{k-1}^H)}}$$

Así $\det([\bar{\Lambda}]_k)$ es una constante determinada por H , γ_k y n_k . Por lo que tenemos,

$$E_s = \text{Tr}(F^H F) = \text{Tr}(\bar{\Lambda}^{-2})$$

Por lo que, E_s será mínimo cuando la diagonal de los elementos de $[\bar{\Lambda}]_k$ sean iguales. Si los elementos diagonales de $[\bar{J}]_k$ son iguales también lo serán los de $[L]_k$. De $H = A^H (\bar{J} \bar{\Lambda}) Q^H$ y de la descomposición de $H = PLQ^H$,

$$L = \bar{J} \cdot \bar{\Lambda} = L, \quad Q = Q, \quad A = P^H$$

Donde

$$\bar{\Lambda} = \text{diag}(J)^{-1} \text{diag}(L) = \left(\sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} \right)^{-1} \Lambda$$



Definiendo

$$\Omega = \bar{\Lambda}^{-1} = \sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} \Lambda^{-1}$$

Finalmente,

$$F = Q\Omega$$

$$B = \left(\sqrt{N_0} \Gamma^{1/2} \right)^{-1} L \Lambda^{-1} = \Omega^{-1} \Lambda^{-1} L \Omega$$

Completa la solución (12).

2.3.2. Demostración analítica del Algoritmo de Mínima Potencia

El siguiente desarrollo muestra como el precodificador estudiado minimiza la potencia frente a un modelo sin precodificador:

- P_{tx} : Potencia del modelo sin precodificador
- E_s : Energía del modelo con precodificador de Mínima Potencia

Por definición la SNR de cada usuario es: $SNR_i = \Gamma_i = \frac{P_{rx}^{(i)}}{N_0}$

Asumimos un modelo de canal normalizado: $P_{rx}^{(i)} = P_{tx}$

Suponiendo $N_0=1$, se puede decir que: $\Gamma_i = P_{tx}$

Según el algoritmo de Mínima Potencia (solución a la ecuación (12)):

$$E_s = Tr(F^H \cdot F), \quad F = Q \cdot \Omega, \quad \Omega = \sqrt{N_0} \cdot \Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot (diag(L))^{-1}$$

Desarrollando la ecuación de la E_s anteriormente mostrada:

$$E_s = Tr((Q \cdot \Omega)^H \cdot (Q \cdot \Omega)) = Tr(\Omega^H \cdot Q^H \cdot Q \cdot \Omega) = Tr(\Omega^H \cdot \Omega)$$

$$E_s = Tr(\Omega^H \cdot \Omega) = Tr\left(\left(\sqrt{N_0} \cdot \Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot (diag(L))^{-1}\right)^H \cdot \left(\sqrt{N_0} \cdot \Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot (diag(L))^{-1}\right)\right)$$

Como se ha aclarado anteriormente, se asume que $N_0=1$:

$$\begin{aligned} E_s &= Tr\left(\left(\Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot (diag(L))^{-1}\right)^H \cdot \left(\Gamma^{\frac{1}{2}} \cdot (diag(L))^{-1}\right)\right) = Tr\left(\left((diag(L))^{-1}\right)^H \cdot \Gamma \cdot (diag(L))^{-1}\right) \\ &= Tr(\Gamma \cdot (diag(L))^{-2}) \end{aligned}$$

Como sabemos la diagonal de L está compuesta por números positivos mayores que 1, por tanto la inversa de la diagonal de L estará compuesta por números menores a 1, elevada pues al cuadrado aún se amplifica más la diferencia entre E_s y P_{tx} :

$$E_s = Tr\left(\Gamma \cdot \left(\frac{1}{diag(L)}\right)^2\right) = \Gamma_i \cdot Tr\left(\left(\frac{1}{diag(L)}\right)^2\right) < P_{tx}$$



Queda demostrada la consecución del objetivo del proyecto, encontrar un precodificador que minimice la potencia de un sistema MIMO.

CAPÍTULO 3

SIMULACIONES



3. SIMULACIONES

A continuación se expondrán una serie de pruebas realizadas sobre el precodificador que muestran la dependencia de la energía y la tasa con el valor de la SNR, con los diferentes escenarios de SNR, según el número de receptores y transmisores y la distribución de las antenas por receptor.

Para estas simulaciones se ha calculado un promedio de los resultados obtenidos en un alto número de ejecuciones. El número de matrices H generadas para obtener el promedio ha sido 10.000, este valor se ha tomado al observar que la media de H se aproximaba a "0", valor de la media de un proceso Gaussiano.

3.1. *Relación E_s /SNR*

Primero se exponen los parámetros del escenario simulado:

- Número de antenas transmisoras $N_t=8$.
- Número de antenas receptoras $N_r=8$ distribuidas igualitariamente entre 4 usuarios: $N_r=[2\ 2\ 2\ 2]$.
- La relación $E_s = f(\text{SNR})$ se representa para diferentes SNR $[-3:1:10]$ [dB], siendo la misma SNR para todos usuario.

La energía (E_s) que se representa en la Figura 3.1. corresponde al escenario descrito anteriormente con su precodificador de mínima potencia, se muestra también la energía (denominada P_{tx} en la gráfica) necesaria para el mismo canal sin utilizar el precodificador. Se observa que la potencia necesaria sin el precodificador siempre es mayor que la energía del modelo con precodificador. Se demuestra el beneficio de los precodificadores para minimizar la potencia de transmisión. La diferencia entre ambas energías es un valor constante debido a que la usamos la misma SNR para todos los usuarios. El comportamiento casi lineal entre E_s y P_{tx} se explica en el punto 2.3. de este Proyecto en el que se demuestra analíticamente la mejora que supone en la potencia de transmisión el uso de precodificadores.

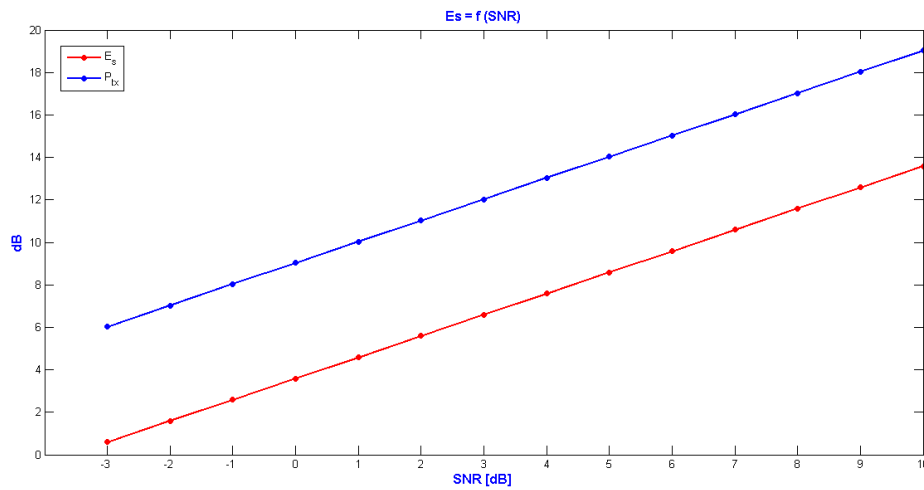


Figura 3.1. E_s y P_{tx} en función de la SNR [dB]

3.2. E_s en función de N_r , N_t , K

La energía de transmisión del canal depende del número de antenas transmisoras y receptoras del mismo como se muestra en la Figura 3.2. Para sostener una misma SNR al aumentar el número de antenas transmisoras la energía total disminuye, ya que la SNR total se divide entre las antenas, mientras que al aumentar el número de antenas receptoras la energía total aumenta ya que sumamos la energía de cada subconjunto. Las SNR con las que trabaja el pre-codificador son iguales para todas las antenas de cada receptor.

En esta simulación se presentan 3 escenarios:

- Escenario 1: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=4=[2 \ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=8 \end{array} \right.$
- Escenario 2: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=4=[2 \ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=16 \end{array} \right.$
- Escenario 3: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=8=[2 \ 2 \ 2 \ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=16 \end{array} \right.$

En la Figura 3.2 se puede observar como partiendo del primer escenario (línea roja) al aumentar el número de antenas transmisoras al doble ($N_t=16$, escenario 2) sin modificar el número de antenas receptoras (línea azul) la energía disminuye. Al partir del segundo escenario de canal (anteriormente mencionado, línea azul) y aumentar el número de usuarios aumentando el número total de antenas receptoras a su vez (línea verde) se observa que aumenta la energía.

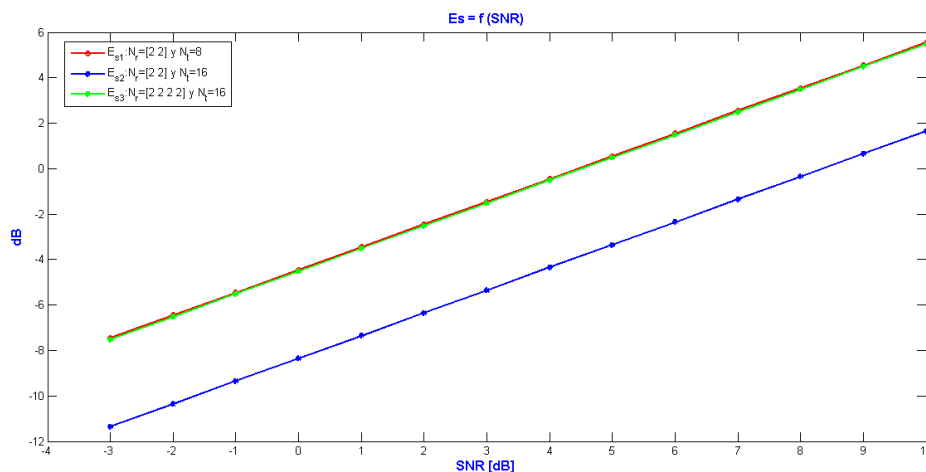


Figura 3.2. E_s en función del número de antenas transmisoras y receptoras

Por otra parte se ha comprobado que con el mismo número de antenas transmisoras y receptoras, aunque se modifique el número de usuario y se distribuyan las antenas de diferente forma entre los usuarios receptores la energía no cambia, como se observa en la Figura 3.3.:

- Escenario 1: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=8=[2 \ 2 \ 2 \ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=16 \end{array} \right.$
- Escenario 2: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=8=[4 \ 4] \\ \text{transmisoras: } N_t=16 \end{array} \right.$

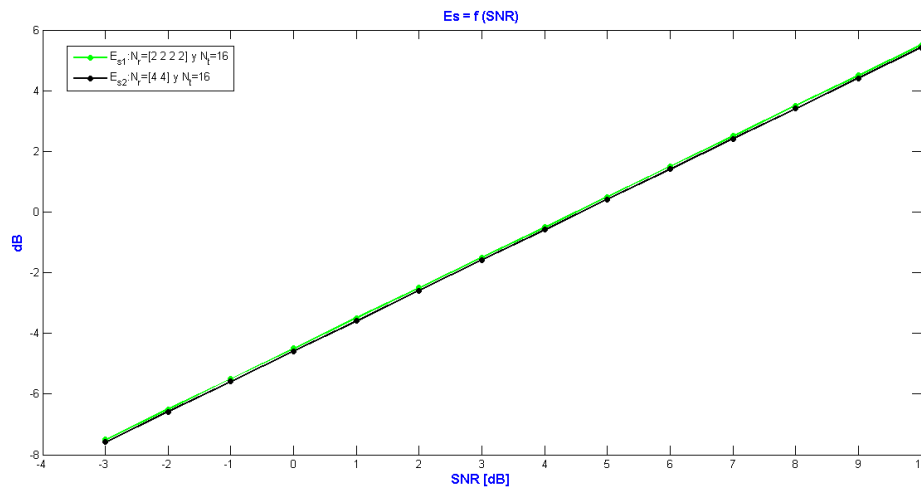


Figura 3.3. E_s en función de la distribución de las antenas transmisoras y receptoras

En la Figura 3.4 se puede observar la doble comparación entre E_s y P_{tx} y la variación que sufren estas a su vez al variar el número de usuarios receptores. Esta figura muestra la mezcla de las comparaciones vistas en las Figuras 3.1 y 3.2. Se comprueba que la P_{tx} es siempre mayor que la E_s .

- Escenario 1: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=8=[2\ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=16 \end{array} \right.$
- Escenario 2: Número de antenas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{receptoras: } N_r=8=[2\ 2\ 2\ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=16 \end{array} \right.$

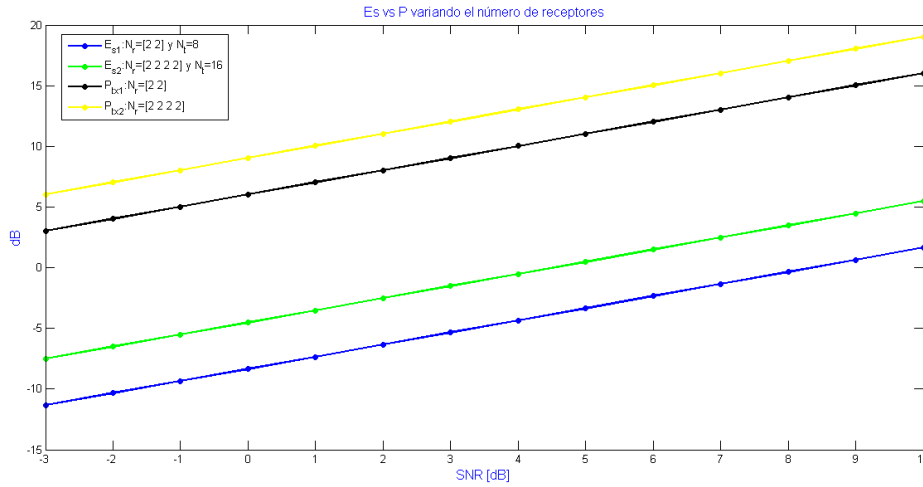


Figura 3.4. E_s vs P_{tx} variando el número de usuarios receptores

Como conclusión se puede ver que tanto la P_{tx} como la E_s aumentan al aumentar el número de usuarios receptores, y que la P_{tx} siempre es mayor que la E_s .

3.3. Tasa en función de K

Con el precodificador BD-GMD se obtiene una tasa para cada usuario. A continuación se muestra la fórmula para el cálculo de la tasa, se observa como la interferencia de los usuarios anteriores afecta en el cálculo:

$$R_i = \log_2(1 + SNIR) = \log_2\left(1 + \frac{P}{1 + \rho}\right) = \log_2\left(\det\left(\mathbf{I}_{n_i} + \frac{(L_{ii} \cdot \Omega_{ii}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H}{\sum_{j=1}^{i-1} (L_{ij} \cdot \Omega_{ij}) \cdot (L_{ij} \cdot \Omega_{ij})^H + P_i \cdot P_i^H}\right)\right)$$

En la Figura 3.5. se muestra qué ocurre al modificar el número de antenas por usuario dejando fijo el número de usuarios ($K=3$) siendo la SNR 3dB para todos los usuarios:

- Escenario 1: Número de antenas: $\begin{cases} K=3 \\ \text{receptoras: } N_r=6=[2 \ 2 \ 2] \\ \text{transmisoras: } N_t=6 \end{cases}$
- Escenario 2: Número de antenas: $\begin{cases} K=3 \\ \text{receptoras: } N_r=6=[3 \ 3 \ 3] \\ \text{transmisoras: } N_t=9 \end{cases}$

- Escenario 3: Número de antenas: $\begin{cases} K=3 \\ \text{receptoras: } N_r=6=[4 \ 4 \ 4] \\ \text{transmisoras: } N_t=12 \end{cases}$
- Escenario 4: Número de antenas: $\begin{cases} K=3 \\ \text{receptoras: } N_r=6=[5 \ 5 \ 5] \\ \text{transmisoras: } N_t=15 \end{cases}$

Se observa que el escenario 4 (línea celeste: 5 antenas por usuario) obtiene una tasa mayor, se comprueba que a mayor número de antenas por usuario mayor tasa se consigue. En todos los casos el último usuario es el que menor tasa obtiene debido a la Interferencia de los dos usuarios anteriores.

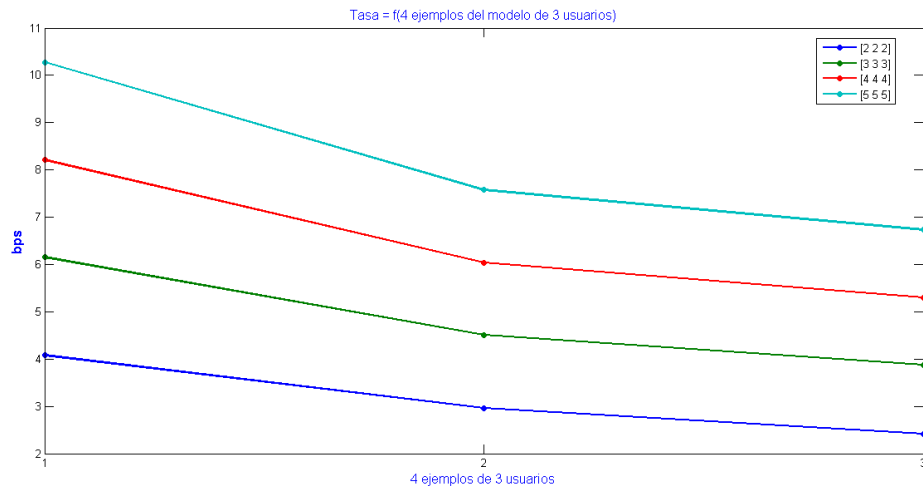


Figura 3.5. Tasa en función del número de antenas por receptor

En la Figura 3.6. se muestra cómo para un escenario de 4 usuarios con diferente número de antenas por usuario: $N_r=11=[2 \ 2 \ 5 \ 2]$ siendo la misma SNR la de los 4 usuarios, el usuario que mayor tasa obtiene es el de mayor número de antenas (5 antenas frente a 2 del resto de usuarios) a pesar de ser el tercer usuario, y por esto, sufrir la interferencia de los dos usuarios anteriores. Se observa como la pendiente es negativa, como cabía esperar al ser un sistema con interferencia y misma SNR para todos los usuarios, salvo la excepción del usuario 3 que al tener más número de antenas que el resto obtiene la mejor tasa.

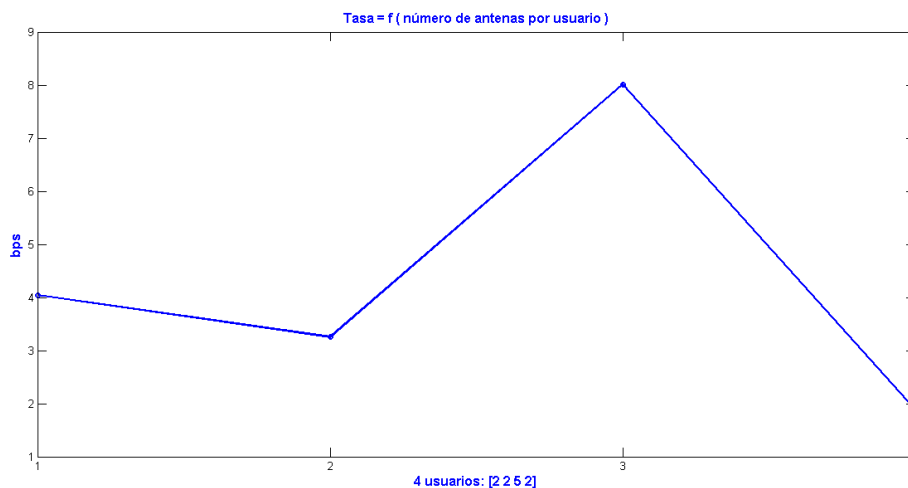


Figura 3.6. Variación de la Tasa debido al número de antenas por receptor

3.4. Relación Tasa/Interferencia

Para un mismo escenario de antenas transmisoras/receptoras se prueba la dependencia de la tasa con la SNR. Escenario de canal simulado:

- $N_r=10$ antenas distribuidas uniformemente entre 5 usuarios:
2 antenas por usuario: $N_r=[2\ 2\ 2\ 2\ 2]$
- $N_t= 10$ antenas
- Valores de SNR usadas para esta simulación:

	SNR	
	dB	u.n.
Valor 1	-3,0	0,5
Valor 2	0,0	1,0
Valor 3	1,8	1,5
Valor 4	3,0	2,0
Valor 5	4,0	2,5

Siendo el valor medio de las SNR de las 5 opciones barajadas el valor 3: 1,5 (1.8 dB).

Se divide el estudio en dos partes, escenarios de SNR con Interferencia y sin ella:

Escenarios de SNR con Interferencia:

- Escenario 1:
Idéntica SNR para los 5 usuarios (valor medio de las SNRs)
- Escenario 2:
Distinta SNR para cada usuario, valores desordenados
- Escenario 3:
Distinta SNR para cada usuario, valores ordenados ascendentemente
- Escenario 4:
Distinta SNR para cada usuario, valores ordenados descendentemente

En la Figura 3.7. se puede observar la evolución de los 4 escenarios detallados anteriormente para la simulación descrita (10 antenas distribuidas uniformemente entre 5 usuarios, 2 antenas por usuario):

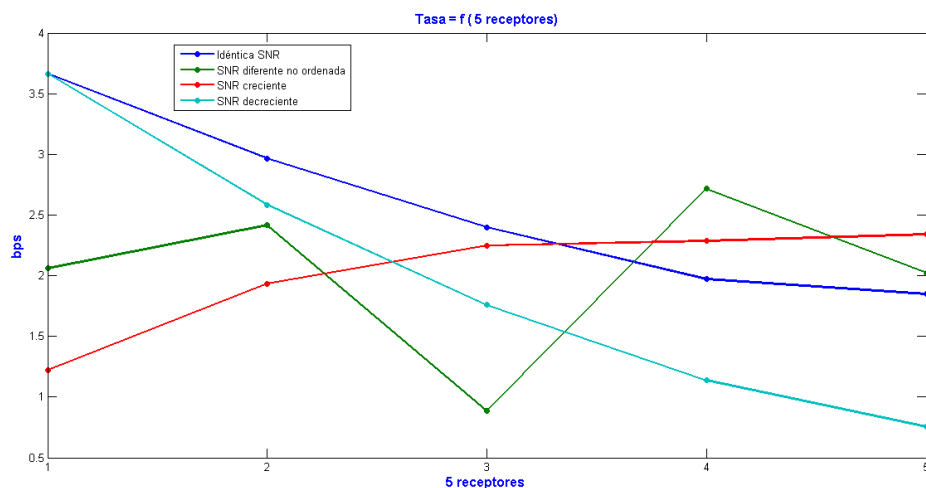


Figura 3.7. Tasa en función del modelo de SNR con Interferencia

Los escenarios de usuarios con distinta SNR ordenados (ordenación de usuarios creciente en SNR: línea roja, ordenación de usuarios decreciente en SNR: línea azul claro) muestran el comportamiento que se podría esperar, en ambos modelos se ve claramente la pendiente de la evolución de la tasa, pero se observa como la pendiente es más pronunciada con los primeros usuarios que con los últimos, para estos últimos se aprecia como si la evolución sufriera una cierta

saturación. El escenario de ordenación decreciente muestra una pendiente negativa y para el último receptor la menor tasa de los cinco usuarios. Mientras que el escenario de ordenación creciente muestra el comportamiento contrario, el último usuario es el que mejor tasa consigue, a pesar de sufrir la interferencia del resto de usuarios esto se debe a que es el usuario con mayor SNR.

El escenario de idéntica SNR (y valor medio) para todos sus usuarios (línea azul oscura) presenta pendiente negativa, como cabría esperar, ya que todos los usuarios tienen la misma SNR pero la interferencia es acumulativa, es decir, el primer usuario no sufre interferencia mientras que el último sufre la interferencia de los 4 usuarios anteriores lo que hace que tenga la menor de las tasas de los 5 usuarios. El escenario 3 de distinta SNR para cada uno de los usuarios y desordenada (línea verde) no sigue ningún patrón y depende de la distribución de SNR que se haga entre los 5 usuarios, en este caso se puede observar como el usuario 4 es el que mayor tasa consigue, a pesar de ser de los últimos usuarios y sufre bastante interferencia de los anteriores, pero es el usuario con mayor SNR.

Otra comparativa de tasa entre modelos de SNR puede ser la de tasa total (*Sum Rate*), que equivale a la suma de las tasas de los 5 usuarios de cada modelo. Se representa en la Figura 3.8:

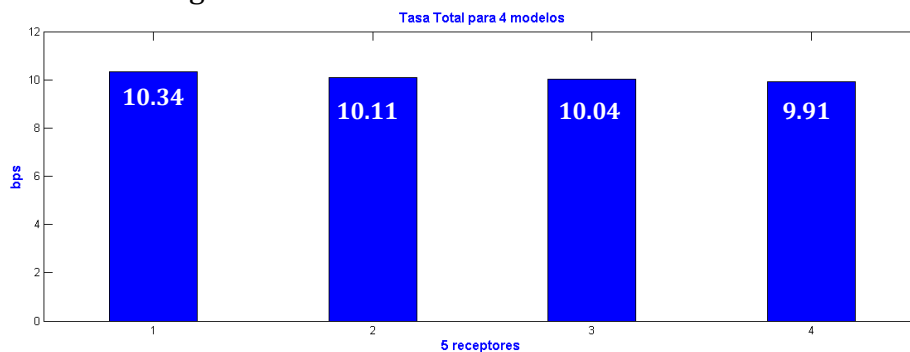


Figura 3. 8. Tasa Total para diferentes modelos de SNR con Interferencia

Se observa como la tasa total para el escenario 1 (cuando se elige el valor medio de SNR para todos sus usuarios) es ligeramente mayor que la tasa total de los escenarios de diferente SNR para cada usuario.

Las pequeñas diferencias entre los escenarios de distinta SNR para cada usuario (modelos 2, 3 y 4) pueden ser debidas a la construcción de la matriz L vista en el apartado 2.2.

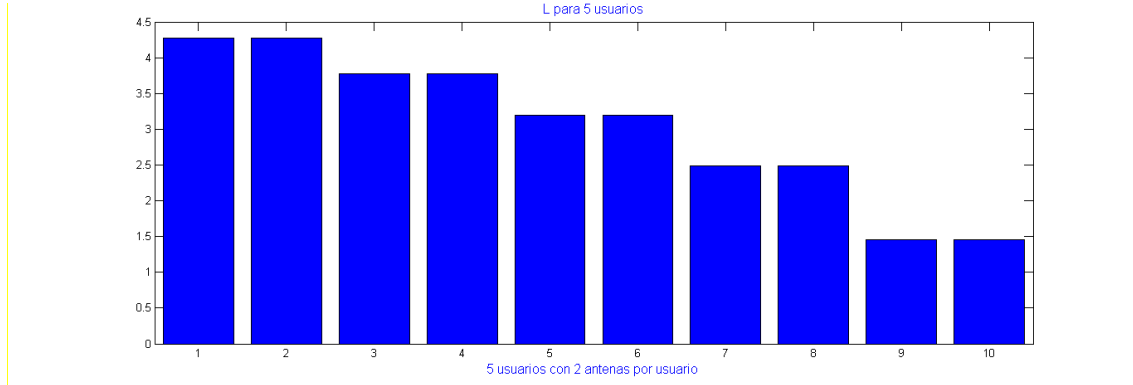


Figura 3.9. Diagonal de L para modelo de 5 usuarios

Por definición del algoritmo BD-GMD, explicado en el apartado 2.2 del Proyecto, la diagonal de la matriz L (triangular inferior) presenta una forma decreciente como muestra la Figura 3.9. El último elemento de la diagonal de L es el más pequeño. Los elementos de la diagonal de L y la tasa son inversamente proporcionales según la definición de la tasa (R) y el algoritmo de Mínima Potencia:

$$R_i = \log_2(1 + SNIR) = \log_2\left(1 + \frac{P}{1 + \sigma}\right) = \log_2\left(\det\left(In_i + \frac{(L_{ii} \cdot \Omega_{ii}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H}{\sum_{j=1}^{i-1} (L_{ij} \cdot \Omega_{ij}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H + P_i \cdot P_i^H}\right)\right)$$

En el caso de los modelos sin interferencia la definición de la tasa cambia:

$$R = \log_2\left(\det\left(In_i + \frac{(L_{ii} \cdot \Omega_{ii}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H}{P_i \cdot P_i^H}\right)\right)$$

La relación inversamente proporcional entre la tasa y la diagonal de L se explica desarrollando el numerador de la ecuación anterior:

$$(L_{ii} \cdot \Omega_{ii}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H = (L_i \cdot \sqrt{\Gamma_i} \cdot \text{diag}(L_i)^{-1}) \cdot (L_i \cdot \sqrt{\Gamma_i} \cdot \text{diag}(L_i)^{-1})^H$$

$$(L_i \cdot \sqrt{\Gamma_i} \cdot \text{diag}(L_i)^{-1}) = \begin{pmatrix} L_{iA} & 0 \\ \Xi_i & L_{iA} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_i} & 0 \\ 0 & \sqrt{\Gamma_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/L_{iA} & 0 \\ 0 & 1/L_{iA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_i} & 0 \\ (\Xi_i \cdot \sqrt{\Gamma_i})/L_{iA} & \sqrt{\Gamma_i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 (L_{ii} \cdot \Omega_{ii}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_i} & 0 \\ (\Xi_i \cdot \sqrt{\Gamma_i})/L_{iA} & \sqrt{\Gamma_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_i} & 0 \\ (\Xi_i \cdot \sqrt{\Gamma_i})/L_{iA} & \sqrt{\Gamma_i} \end{pmatrix}^H \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_i} & 0 \\ (\Xi_i \cdot \sqrt{\Gamma_i})/L_{iA} & \sqrt{\Gamma_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma_i} & (\Xi_i \cdot \sqrt{\Gamma_i})/L_{iA} \\ 0 & \sqrt{\Gamma_i} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \Gamma_i & (\Gamma_i \cdot \Xi_i)/L_{iA} \\ (\Gamma_i \cdot \Xi_i)/L_{iA} & \Gamma_i + \left(\frac{\Xi_i^2 \cdot \Gamma_i}{L_{iA}^2} \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Escenarios de SNR sin interferencia:

- Escenario 1:
Idéntica SNR para los 5 usuarios (valor medio de las SNRs)
- Escenario 2:
Distinta SNR para cada usuario, valores desordenados
- Escenario 3:
Distinta SNR para cada usuario, valores ordenados ascendentemente
- Escenario 4:
Distinta SNR para cada usuario, valores ordenados descendentemente

En la Figura 3.10. se puede observar la evolución de los 4 escenarios detallados anteriormente para la simulación descrita (10 antenas distribuidas uniformemente entre 5 usuarios, 2 antenas por usuario):

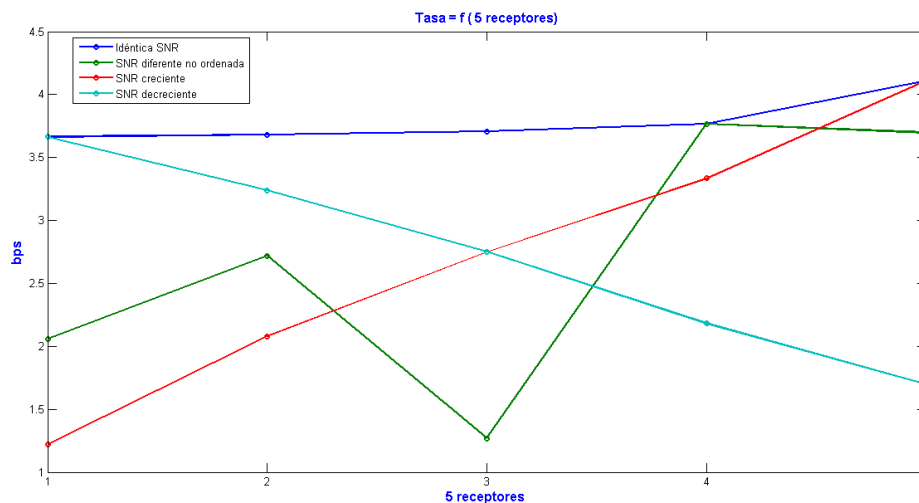


Figura 3.10. Tasa en función del modelo de SNR sin Interferencia

Como ya se pudo observar con anteriormente con los modelos con Interferencia, los modelos de usuarios con distinta SNR ordenados (ordenación de usuarios creciente en SNR: línea roja, ordenación de usuarios decreciente en SNR: línea azul claro) muestran claramente la pendiente de la evolución de la tasa. El modelo de ordenación decreciente muestra una pendiente negativa y para el último receptor la menor tasa de los cinco usuarios. Mientras que el modelo de ordenación creciente muestra el comportamiento contrario, el último usuario es el que mejor tasa consigue, más claramente que en el caso de modelos con Interferencia, en ese caso el último usuario conseguía la máxima de las tasas de los usuarios pero no se disparaba tanto el valor debido a que existía Interferencia.

El modelo de idéntica SNR (y valor medio) para todos sus usuarios (línea azul oscura) presenta pendiente positiva y mayor tasa para el último usuario, al contrario que el mismo modelo con interferencia, que a pesar de que todos sus usuarios tuvieran la misma SNR al ser interferencia acumulativa el último sufre la interferencia de los 4 usuarios anteriores lo que hace que tenga la menor de las tasas de los 5 usuarios. Este es el caso que más diferencias aporta entre el modelo con interferencia y sin ella. Además como ya se ha explicado anteriormente los elementos de la diagonal de L y la tasa son inversamente proporcionales según la definición de la tasa y como se puede observar en la Figura 3.9. los elementos de L presentan un orden decreciente, lo que implica que a menor L mayor tasa, y por eso el último usuario del modelo de idéntica SNR y sin Interferencia de la Figura 3.10. consigue la máxima tasa.

El escenario 3 de distinta SNR para cada uno de los usuarios y desordenada (línea verde) no sigue ningún patrón y depende de la distribución de SNR que se

haga entre los 5 usuarios, en este caso se puede observar como el usuario 4 es el que mayor tasa consigue por ser el usuario con mayor SNR.

En la Figura 3.11. se muestra la comparativa de tasa total (*Sum Rate*), que equivale a la suma de las tasas de los 5 usuarios de cada modelo:

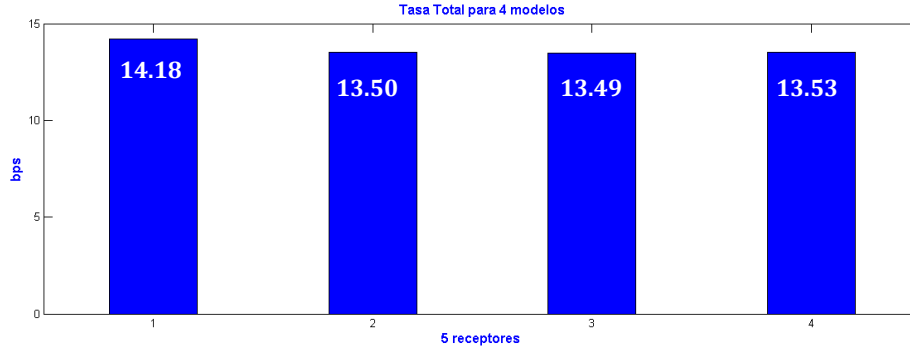


Figura 3. 11. Tasa total para diferentes modelos de SNR sin Interferencia

Se observa como la tasa total para el escenario 1 (valor medio de SNR para todos sus usuarios) es mayor que para los escenarios de diferente SNR para cada usuario, la diferencia es parecida a la diferencia observada en los escenarios con interferencia, Figura 3.8., por otra parte si se puede observar que es mayor la tasa total para 4 escenarios de la Figura 3.11. que para los 4 escenarios de la Figura 3.8., debido a la eliminación de la interferencia. En el caso que nos ocupa, escenarios sin interferencia, es fácil observar como el 4º escenario (distintas SNR para cada usuario ordenados decrecientemente) es el que mayor tasa total obtiene de entre las 3 últimas (diferente SNR), esto se debe a que coincide que la ordenación de la diagonal de L es decreciente, y la ordenación de las SNR también es decreciente. Según la ecuación:

$$(L_{ii} \cdot \Omega_{ii}) \cdot (L_{ii} \cdot \Omega_{ii})^H = \begin{pmatrix} \Gamma_i & (\Gamma_i \cdot \Xi_i) / L_{iA} \\ (\Gamma_i \cdot \Xi_i) / L_{iA} & \Gamma_i + \left(\Xi_i^2 \cdot \Gamma_i \right) / L_{iA}^2 \end{pmatrix}$$

Comparativa entre escenarios con Interferencia y sin ella:

Como cabía esperar los modelos sin interferencia (escenarios 5 y 6) son los que mayor tasa obtienen para el último usuario. Por su parte el escenario con interferencia y SNR ordenada decreciente (escenario 4) es el que peor tasa consigue para el último usuario, lógico ya que es de los 5 usuarios el que menor SNR tiene y además sufre la interferencia del resto de usuarios. También era de

esperar que de los cuatro escenarios con interferencia el escenario con ordenación creciente (caso 3) sea el que mejor tasa obtiene para su último usuario.

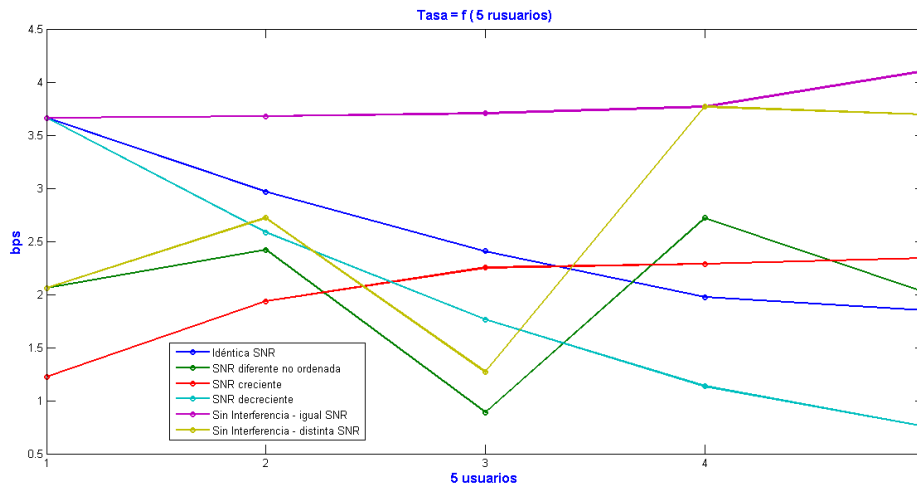


Figura 3.12. Tasa en función del modelo de SNR con y sin interferencia

Es interesante comparar el valor de tasa total (suma de tasas de todos los usuarios) además de ver como se evoluciona el valor de tasa entre los usuarios. Los escenarios 2, 3 y 4 (con interferencia y distinta SNR para cada usuario), a pesar de mostrar un patrón diferente en la gráfica 3.12. obtienen un valor de tasa total muy semejante, el escenario 6 (sin interferencia y distinta SNR para cada usuario, sin ordenación) obtiene mayor tasa que los modelos 2, 3 y 4, lógico ya que en este modelo no influye la interferencia. Entre el modelo 1 y 5 ocurre lo mismo, son escenarios con SNR idéntica para sus 5 usuarios pero en el caso del escenario 1 hay interferencia y en el 5 no, por lo que el caso 5 obtendrá siempre mejor tasa que el 1.

La comparativa entre los escenarios 1 y 5 y el resto de escenarios resulta más complicada ya que hay que tener en cuenta que los casos 1 y 5 tienen la misma SNR para sus 5 usuarios. Por lo que se muestran 3 posibilidades:

1. SNR idéntica con el valor mínimo de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6.
2. SNR idéntica con el valor medio de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6.
3. SNR idéntica con el valor máximo de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6.

Los resultados de la comparativa se muestran a continuación:

1. SNR idéntica con el valor mínimo de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6. El escenario que obtiene mayor tasa total es el escenario 6, ya que el caso 5 tiene el valor de SNR más baja de entre los diferentes valores de SNR del escenario 6.

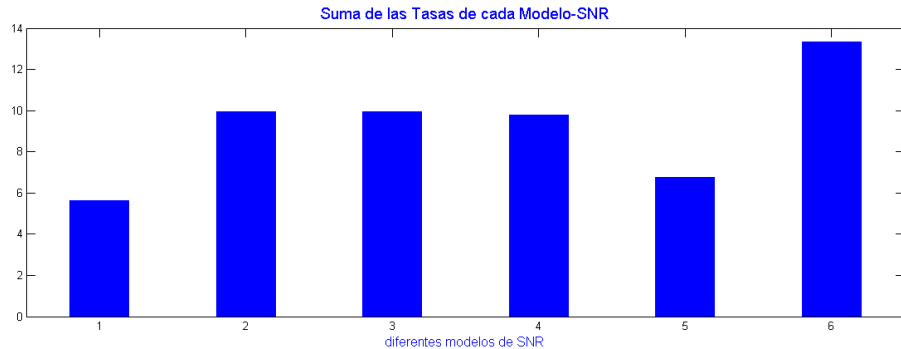


Figura 3.13. Comparativa de Tasa Total para diferentes modelos de SNR (valor mínimo)

- SNR idéntica con el valor medio de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6. El escenario 5 es el que mayor tasa total obtiene, en este caso, debido a que la SNR de todos sus usuarios es el valor medio de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6. Cabe destacar que el escenario 6 obtiene mayor tasa total que el escenario 1, teniendo el caso 1 la SNR media para todos sus usuarios, lo que demuestra que es más importante la eliminación de interferencia que un valor de SNR medio para obtener tasas de mayor valor.

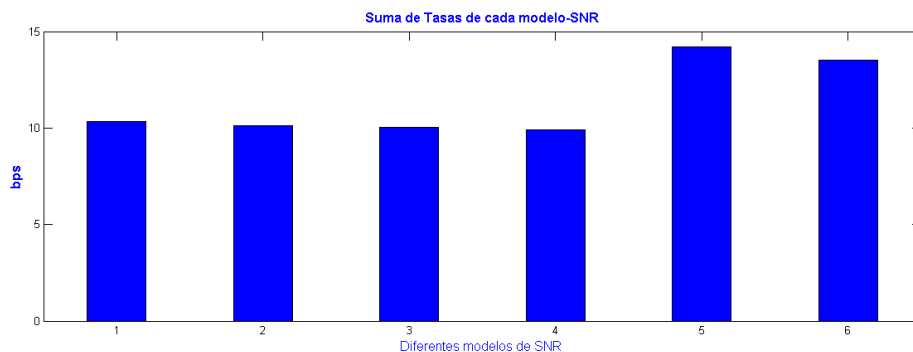


Figura 3.14. Comparativa de Tasa Total para diferentes modelos de SNR (valor medio)

- SNR idéntica con el valor máximo de SNR de los escenarios 2, 3, 4 y 6. El escenario 5 es el que mayor tasa total obtiene, en este caso, debido a que la SNR de todos sus usuarios es el valor máximo de SNR de los modelos 2, 3, 4 y 6, y que no sufre interferencia. Caso más claro aún que el anterior.

En este caso el escenario 1 y el 6 obtienen una tasa total muy parecida, debido al hecho de que el escenario 1 tiene SNR máxima en todos sus usuarios pero sufre interferencia mientras que el usuario 6 tiene distribución de SNR diferentes entre sus usuarios sin sufrir interferencia.

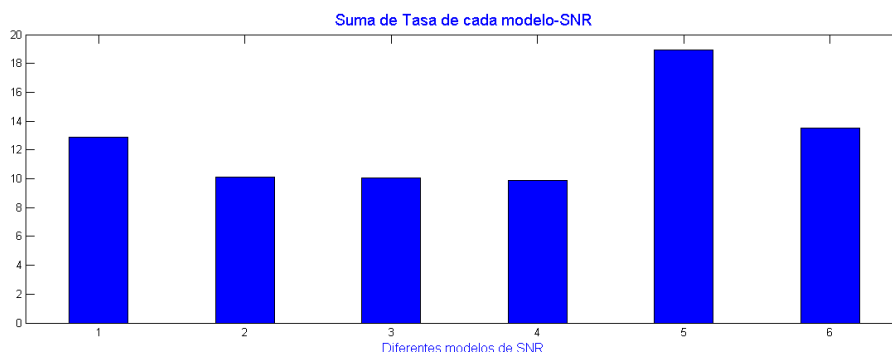


Figura 3.15. Comparativa de Tasa Total para diferentes modelos de SNR (valor máximo)

Es importante apuntar como conclusión que el escenario de SNR diferente para cada usuario y con ordenación decreciente (escenario 4) obtiene en todos los casos la menor tasa. Aunque con valores muy cercanos al escenario de ordenación creciente y al desordenado. Este mismo escenario cuando se elimina la interferencia obtiene mayor tasa total que los de ordenación creciente y desordenado, como se puede haber observado anteriormente en la Figura 3.11.

3.5. *Variación de número de receptores y transmisores*

Se muestran 5 escenarios. Como ya se ha demostrado a mayor número de antenas/usuario aumenta la tasa. Se ve claramente como en la serie rosa [2 2 5 2] el tercer usuario es que obtiene mayor tasa mientras que en las series roja y azul [2 2 2 5] es el cuarto usuario. La variación del número de antenas transmisoras no varía el resultado.

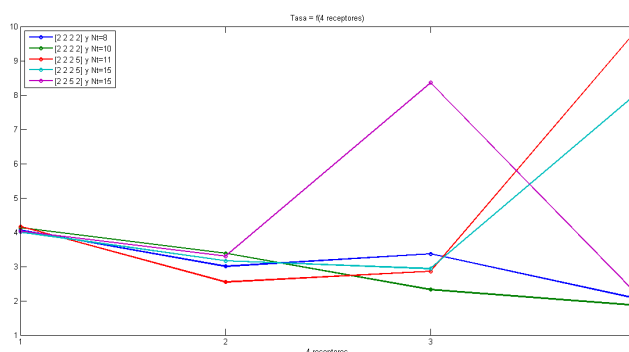


Figura 3.16. Tasa en función del número de receptores y transmisores

3.6. *Es en función de diferentes modelos de SNR*

Se realiza la prueba para comprobar cómo se comporta la energía en un mismo modelo de canal: $N_t=10$, $N_r=10=[2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$ para 5 escenarios de SNR diferentes:

- Idéntica SNR para los 5 usuarios: valor mínimo.
- SNR distinta para cada receptor, valores desordenados.
- SNR distinta para cada receptor, valores ordenados ascendentemente.
- SNR distinta para cada receptor, valores ordenados descendientemente.
- Idéntica SNR para los 5 usuarios: valor máximo.

Se puede observar como la energía se ve afectada por la distribución de la SNR. Como era de esperar la energía más alta necesaria se obtiene para el escenario en que todos los usuarios tienen la misma SNR siendo este el valor máximo de los valores de SNR barajados. El menor valor de energía se obtiene cuando la distribución de SNR de los usuarios es idéntica al menor valor de SNR. Entre los modelos de SNR diferente el que necesita mayor energía es el que tiene SNR ordenada ascendentemente para sus usuarios y la menor la que la ordenación es descendente.

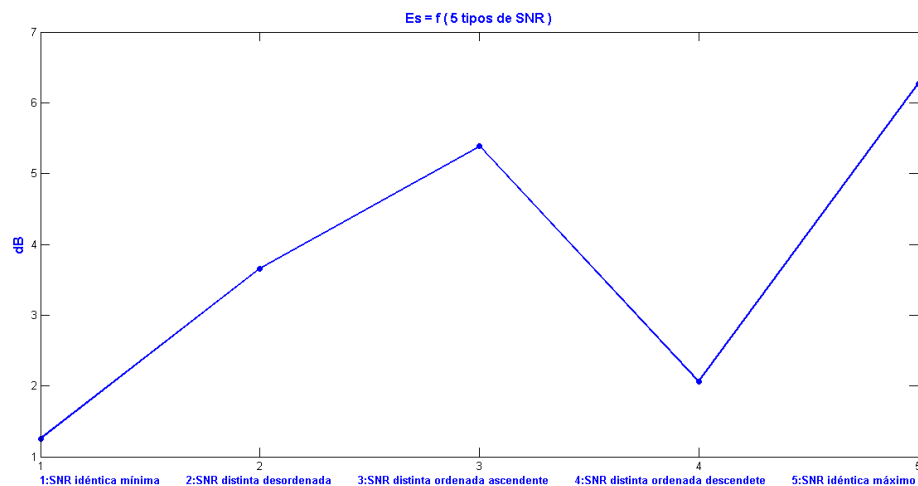


Figura 3.17 Energía en función de diferentes modelos de SNR

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES Y POSIBLES MEJORAS



4. CONCLUSIONES Y POSIBLES MEJORAS

4.1. Conclusiones

Existen en la literatura métodos y precodificadores que minimizan la potencia bajo determinados requerimientos de SINR usando aproximaciones iterativas y optimización convexa, pero dichos métodos son muy caros computacionalmente. En sistemas MIMO la alta complejidad involucrada es el gran obstáculo. En el proyecto se ha desarrollado una nueva técnica de minimización de potencia usando DPC utilizando la descomposición BD-GMD.

Se ha comprobado con las simulaciones y las pruebas realizadas al algoritmo que los requerimientos a tener en cuenta se cumplan, el método BD-GMD obtiene el formato de matriz necesario para las tres matrices involucradas (P , L y Q) en la descomposición de H y con valores de error obtenidos muy bajos (entorno a 10^{-14}).

Se ha comprobado el cumplimiento del objetivo del proyecto, el desarrollo del precodificador de Mínima Potencia basado en el algoritmo BD-GMD, se ha demostrando la veracidad de su teorema de minimizar la potencia de transmisión de manera analítica y en las simulaciones.

Además de minimizar la potencia de transmisión, el algoritmo tiene ciertas características también probadas en el capítulo de simulaciones tales como dependencia de la potencia con el número de antenas receptoras y transmisoras, de la tasa con L y con el número de antenas por usuario.

La ordenación de usuarios no se ha llevado a cabo de manera analítica, y podría resultar un caso interesante de continuidad del proyecto. De manera simulada sí se ha podido comprobar que la ordenación de usuarios da resultados determinados, debido a que la matriz L involucrada en la descomposición de H siempre muestra una ordenación decreciente en los valores de la diagonal de los usuarios. Al calcular la tasa y la energía la matriz L toma partido, por lo que influye en el resultado como se ha explicado en las simulaciones del capítulo 3.

El proyecto llevado a cabo ha resultado interesante por la novedad del estudio de precodificadores de Mínima potencia, poco desarrollados y estudiados. Esta característica de los precodificadores ha resultado tanto estimulante como a su vez una dificultad, por los pocos trabajos realizados y publicados al respecto.

4.2. Posibles Mejoras

4.2.1. Todos los TX

El método utilizado de descomposición diagonal bloque (BD-GMD) sólo realiza la descomposición en bloques del receptor. El ecualizador lineal del receptor (P) es una matriz unitaria bloque mientras que el precodificador (Q) es una matriz semi-unitaria.

$$P_{NrxNr} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & P_K \end{bmatrix}$$
$$Q_{NtxNr} = \begin{bmatrix} Q_{1x1} & \cdots & \cdots & Q_{1xNr} \\ \vdots & Q_{2x2} & \ddots & \vdots \\ Q_{Ntx1} & \cdots & \cdots & Q_{NtxNr} \end{bmatrix}$$

De manera que en el receptor podemos decodificar cada usuario por separado. Pero este método no es dual ya que la matriz Q no es una matriz unitaria bloque y no se pueden separar los usuarios transmisores, esta posibilidad sería una buena continuación del proyecto.

4.2.2. Ordenación de Usuarios

La ordenación de usuarios afecta a la Potencia Total Transmitida, la ordenación de usuarios se puede entender como la ordenación de las filas de H , por lo que se podría utilizar la matriz de ordenación D de la siguiente manera:

$$DH = PLQ^H$$

Se ha probado la ordenación de usuarios en las simulaciones pero no de forma analítica. Por lo que sería otra buena continuación que se podría hacer de este proyecto, el cálculo de manera analítica de la ordenación de los usuarios para obtener una óptima potencia mínima. La mejor ordenación que se puede encontrar es aproximadamente 100 veces más rápida que los métodos iterativos [20]. Para reducir aún más la complejidad se explican tres algoritmos simples a continuación, son métodos no iterativos y no utilizan procedimientos de optimización convexa. Proceden de la forma sucesiva *Top Down* del usuario 1 al K [19]:

1. Successive closest Match (SCM)

La minimización de $E_s = Tr(F^H \cdot F) = Tr(\Omega^2)$ se consigue cuando los elementos de la diagonal de Ω son iguales.

$$Tr(\Omega^2) = N_0 Tr(\Gamma \Lambda^{-2})$$

Los elementos diagonales de Λ_i vienen dados por:

$$r_i = \sqrt[2n_i]{\det(\Lambda_i^2)} = \sqrt[2n_i]{\frac{\det(\hat{H}_i \hat{H}_i^H)}{\det(\hat{H}_{i-1} \hat{H}_{i-1}^H)}}$$

Se busca que r_i sea cercano a m_i , siendo M :

$$M = \Gamma^{1/2} \cdot \sqrt[2N_R]{\frac{\det(HH^H)}{\det(\Gamma)}}$$

La energía viene dada por:

$$E_s = Tr(\Omega^2) = N_0 \cdot \sqrt[2N_R]{\frac{\det(\Gamma)}{\det(HH^H)}} \cdot Tr\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)$$

Para minimizar E_s minimizamos $Tr\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)$, se elige Λ_i lo más parecida a

M_i , para Minimizar $Tr(M^2 \Lambda^{-2})$ mientras se cumpla $\det(M^2 \Lambda^{-2}) = 1$.

Para el usuario 1:

$$\text{Min } n_1 \sqrt[2n_1]{\det(M_1^2 \Lambda_1^{-2})} + \tilde{n}_2 \sqrt[2\tilde{n}_2]{\det(\Lambda_1^2 M_1^{-2})}$$

Para el usuario 2 en adelante:

$$\text{Min } n_i \sqrt[2n_i]{\det(M_i^2 \Lambda_i^{-2})} + \tilde{n}_{i+1} \sqrt[2\tilde{n}_{i+1}]{\det(\hat{\Lambda}_{i-1}^2 \hat{M}_{i-1}^{-2}) \det(\Lambda_i^2 M_i^{-2})}$$

2. Minimize r_i

Nota: r_i =elementos diagonales de L

Descomposición QR:

$$P^H H = L Q^H$$

El primer elemento de L es más grande que el último elemento, demostrado en la Figura 3.9. de este documento. Si se establecen los mismos requerimientos de SNR para cada usuario, al minimizar el valor del primer elemento de la diagonal de L se tiende a disminuir la propagación en los valores de la diagonal de L . Empezando por el usuario 1 y usando:

$$r_i = \sqrt[2n_i]{\det(\Lambda_i^2)} = \sqrt[2n_i]{\frac{\det(\hat{H}_i \hat{H}_i^H)}{\det(\hat{H}_{i-1} \hat{H}_{i-1}^H)}}$$

Se elige H_i para minimizar r_i y así sucesivamente hasta el usuario K .

3. Minimize Chanel Strength

Si suponemos que los usuarios se encuentran a diferente distancia de la estación base, deriva en diferente fortaleza de los canales. Para canales de bajada la solución a la minimización de potencia será codificar primero los canales más débiles.

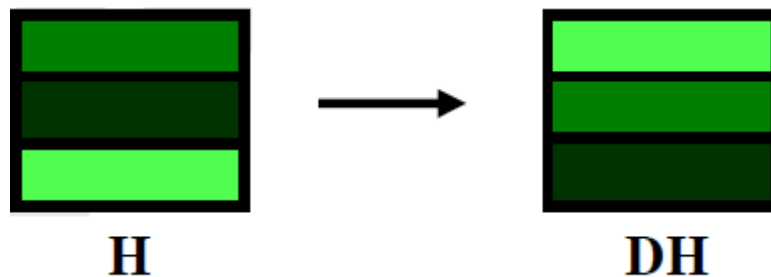


Figura 4.1. Ordenación de Usuarios [19]

Minimización de $\frac{Tr(H_i H_i^H)}{n_i}$, se empieza por el usuario 1 y se avanza hasta el usuario K .



Complejidad de los métodos explicados anteriormente (siendo K el número de usuarios del sistema):

Opciones:	Complejidad
Método óptimo de Minimización de Potencia ZF	$(K K!)$
SCM	$\frac{K(K+1)}{2}$
Minimize r_i	$\frac{K(K+1)}{2}$
Minimize Chanel Strength	0

Tabla 4.2. 1 Complejidad de los métodos de Ordenación

ANEXO



ANEXO: Presupuesto

Fecha de comienzo: Octubre 2012

Fecha de finalización: Octubre 2013

Fases del Proyecto:

- Estudio → de Octubre a Diciembre: 2 meses
- Desarrollo Analítico → de Diciembre a Marzo: 3 meses
- Implementación en MATLAB → de Marzo a Agosto: 4 meses
- Documentación → desde Julio: 3 meses

La justificación del coste de llevar a cabo este proyecto se divide en dos partes, el coste del personal y el coste material.

A continuación se describe el coste personal de las horas empleadas por el autor del proyecto, un Ingeniero de Telecomunicaciones sin el título. Se muestra una estimación de horas empeladas en cada fase del proyecto:

Fases	Descripción	Número de horas
Fase 1	Estudio	100 horas
Fase 2	Desarrollo	200 horas
Fase 3	Implementación en MATLAB	300 horas
Fase 4	Documentación	200 horas

I. 1. Descripción del coste personal del autor

Se muestra la descripción del costo del supervisor del proyecto, un Ingeniero Superior:

Fases	Descripción	Número de horas
Fase 1	Estudio	10 horas
Fase 2	Desarrollo	15 horas
Fase 3	Implementación en MATLAB	20 horas
Fase 4	Documentación	50 horas

I. 2. . Descripción del coste personal del supervisor



El total de horas invertidas por parte del autor en el proyecto es de 800, a un salario de 8€/hora para un estudiante de Ingeniería sumaría un total de 6400€ el presupuesto del proyecto invertido en el autor.

El total de horas invertidas por parte del supervisor del proyecto es de 95, a un salario de 35€/hora, el total del presupuesto para el supervisor sería de 3.325€. Por lo que el gasto en personal ascendería a la cifra de 9.725€.

Materiales utilizados	Precio
Ordenador portátil HP Pavilion g6	699€
Paquete Microsoft Office	120€
Licencia de Matlab	500€
Otros	100€

I. 3. Descripción del coste material

El coste total invertido en herramientas asciende a 1.419€.

Por lo que el presupuesto total del proyecto asciende a 11.144€:

Presupuesto total	Precio
Presupuesto Autor	6.400€
Presupuesto supervisor	3.325€
Herramientas	1.419€
Total	11.144€

I. 4. Descripción del coste total del proyecto

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] “Introducción a Sistemas de Múltiples Antenas”, UAM Escuela Politécnica Superior. Sept. 2007.
- [2] F. Llinares López “Clustering Techniques for Base Station Coordination in a Wireless Cellular System”, PFC UCIIM Sept. 2012
- [3] F. Moety, S. Lahoud, K. Khawam, Bernard Cousin “Joint Power-Delay Minimization in Green Wireless Access Networks” PIMRC 2013 - IEEE 24th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications (2013)
- [4] Y.-C. Liang and W. W. L. Ho, “Efficient Power Minimization for MIMO Broadcast Channels with BD-GMD,” Institute for Infocomm Research Singapore, pp. 2791-2796, 2007.
- [5] Y. Jiang, J. Li, and W. W. Hager, “Joint Transceiver Design for MIMO Communications using Geometric Mean Decomposition,” IEEE Trans. Signal Processing, vol. 53, no. 10, pp. 3791–3803, Oct. 2005.
- [6] S. Lin, W.W.L. Ho, and Y.-C. Liang, “Block-diagonal Geometric Mean Decomposition (BD-GMD) for Multiuser MIMO Broadcast Channels,” Int. Symp. Personal, Indoor and Mobile Radio Commun., pp. 1-5, Helsinki, 11– 14 Sep. 2006.
- [7] W.W.L. Ho, S. Lin and Y.-C. Liang, “Block Diagonal Geometric Mean Decomposition (BD-GMD) for MIMO Broadcast Channels,” IEEE Trans. On Wirelss Communications, vol. 7, no. 7, Jul 2008
- [8] W.W.L. Ho, “Multiuser MIMO wireless communications: Optimal and Efficient schemes for rate maximization and power minimization”, PhD Thesis, University of Singapore, 2008
- [9] W. Hager, Y. Jiang and J. Li, “The geometric mean decomposition,” Linear Algebra Its Applications, vol. 396, pp. 373–384, Feb. 2005.
- [10] A. Goldsmith, “Wireless Communications”, Cambridge University Press, 2005.
- [11] M. Costa, “Writing on dirty paper”, IEEE Transactions on Information Theory, vol. IT-29, no. 3, pp. 439-441, Mayo 1983.



- [12] M. Tomlinson, "New automatic equalizer employing modulo arithmetic", *Electronic Letters*, vol:7, issue:5, pp. 138-139, Mar 1971.
- [13] H. Harashima, H. Miyakawa, "Matched-transmission technique for channels with intersymbol interference", *IEEE Transactions on Communication*, vol:20, issue:4, pp. 774-780, Aug 1972.
- [14] D. Sánchez Herrera, "Estudio de dualidad transmisión-recepción en sistemas MIMO Multiusuario", PFC UCIIM, 2009.
- [15] P. Kosowski, A. Smoktunowicz, "On constructing unit triangular matrices with prescribed singular values", *Computing* vol:64, issue:3, pp. 279-285, May 2000.
- [16] G. Ginis, J.M. Cioffi, "Vectored transmission for digital subscriber line systems", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol:20, no:5, pp. 1085-1104, Jun 2002.
- [17] W.W.L. Ho and Y.-C. Liang "User Ordering and Subchannel Selection for Power Minimization in MIMO Broadcast Channels using BD-GMD", *IEEE Vehicular Technology Conf.* pp. 1-5, 2008 Fall, Calgary.
- [18] W.W.L. Ho and Y.-C. Liang "Block-Diagonal Geometric Mean Decomposition (BD-GMD) for Multiuser MIMO Broadcast", *Institute for Infocomm Research (I2R), Singapore* (2006).
- [19] Y.-C. Liang and W. W. L. Ho, "Efficient Power Minimization for MIMO Broadcast Channels with BD-GMD," *Institute for Infocomm Research (I2R), Singapore* (2007).
- [20] J. Lee and N. Jindal "Symmetric Capacity of MIMO Downlink Channels," *IEEE Int. Symp. Inform. Theory*, pp. 1031-1035, Jul. 2006.
- [21] G. V. Tsoulos, M.A. Beach, "Calibration and linearity issues for an adaptative antenna system", *Proceedings VTC*, pp. 1597-1600, Mayo 1997.
- [22] C. Belfore, J. Park, "Decision feedback equalization", *IEEE Proceedings*, pp. 1143-1156, 1979.



- [23] Y. Jiang, J. Li, and W. Hager, "Uniform channel decomposition for MIMO communications," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 53, no. 11, pp. 4283–4294, Nov. 2005.
- [24] P. Viswanath and D. Tse, "Sum capacity of the vector Gaussian broadcast channel and uplink-downlink duality," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 8, pp. 1912–1921, Aug. 2003.
- [25] S. Vishwanath, N. Jindal, and A. Goldsmith, "Duality, achievable rates, and sum-rate capacity of Gaussian MIMO broadcast channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, no. 10, pp. 2658–2668, Oct. 2003.
- [26] Z. Q. Luo and W. Yu, "An Introduction to Convex Optimization for Communications and Signal Processing," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. 24, pp. 1426–1438, Aug. 2006.
- [27] G. J. Foschini, G. D. Golden, R. A. Valenzuela, and P. W. Wolniansky, "Simplified processing for high spectral efficiency wireless communication employing multiple-element arrays," *Wireless Pers. Commun.*, vol. 6, pp. 311–335, Mar. 1999.

